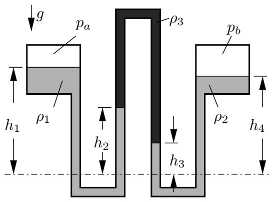
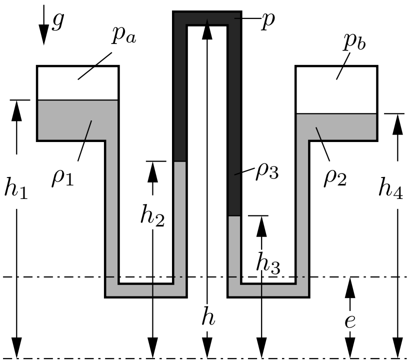
# Tutorium

## Aufgabe 52

Zwei Flüssigkeitsbehälter sind nach nebenstehender Skizze durch ein Rohrsystem miteinander verbunden. Über der Flüssigkeit in beiden Behältern befindet sich Luft. In den Behältern und dem Rohrsystem befinden sich drei verschiedene Flüssigkeiten mit den Dichten $\rho_1$, $\rho_2$ und $\rho_3$. Die Druckdifferenz zwischen den beiden Behältern beträgt $p_a - p_b = \Delta p$. Wie groß ist die Dichte $\rho_3$ der dritten Flüssigkeit?

Geg.: $\Delta p$, $h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$, $\rho_1$, $\rho_2$, $g$




Für jedes der beiden U-Rohre herrscht Kräftegleichgewicht. Es wird jeweils das hydrostatische Grundgesetz in Höhe $e$ vom Boden aus aufgestellt und der Druck für die beiden Schenkel jedes U- Rohres gleichgesetzt. Dabei sei $p$ der Druck an der höchsten Stelle zwischen den beiden Behältern.

Linkes U-Rohr:

$$p_a + \rho_1 \cdot g(h_1 - e) = p + \rho_1 \cdot g(h_2 - e) + \rho_3 \cdot g(h - h_2) \quad (1)$$

Rechtes U-Rohr:

$$p_b + \rho_2 \cdot g(h_4 - e) = p + \rho_2 \cdot g(h_3 - e) + \rho_3 \cdot g(h - h_3) \quad (2)$$

Subtrahiert man Gleichung (2) von Gleichung (1), so ergibt sich:

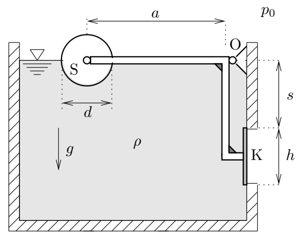
$$\begin{aligned}(p_a - p_b) + \rho_1 \cdot g(h_1 - e) - \rho_2 \cdot g(h_4 - e) &= \\ \rho_1 \cdot g(h_2 - e) - \rho_2 \cdot g(h_3 - e) &+ \rho_3 \cdot g(h_3 - h_2) \quad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\rho_3 \cdot g(h_3 - h_2) \\ &\quad = (p_a - p_b) + \rho_1 \cdot g(h_1 - h_2) + \rho_2 \cdot g(h_3 - h_4) \\ &\rho_3 = \frac{\frac{1}{g}(p_a - p_b) + \rho_1(h_1 - h_2) + \rho_2(h_3 - h_4)}{h_3 - h_2} \quad (4)\end{aligned}$$

## Aufgabe 57

Die Öffnung einer Behälterwand wird durch eine Klappe K mit der Breite $b$ (senkrecht zum Bild) und der Höhe $h$ verschlossen. Sie ist über einen um O drehbaren und masselosen Winkelhebel mit einem zylindrischen masselosen Schwimmer S (Durchmesser $d$, Breite $b$) verbunden. Der Auftrieb des Hebels werde vernachlässigt.

Geg.: $p_0, s, h, b, \rho, g, d$




(a) Bestimmen Sie die Auftriebskraft des Schwimmers, wenn der Wasserspiegel auf der Höhe des Drehpunkts O liegt.

(b) Bestimmen Sie die Druckverteilung innen an der Klappe und die Kraft, die aufgrund des Wasserdrucks von innen auf die Klappe wirkt.

(c) Wie groß muss $a$ sein, damit die Klappe öffnet, wenn der Wasserspiegel bis zur Höhe des Drehpunkts O gestiegen ist?

**(a)** Hinweis: Die Definition für die jeweilige Auftriebskraft $F_A$ ist zu beachten.

$$\begin{aligned}F_A &= \rho g \frac{V_{Zyl}}{2} \\ &= \rho g \frac{1}{2}\left[\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 b\right] \\ &= \frac{1}{8}\rho g \pi d^2 b \qquad (5)\end{aligned}$$

**(b)** Der Druckverlauf ist durch die Grundgleichung der Hydrostatik für inkompressible Fluide bestimmt. Dabei ist zu beachten, wie die Koordinate $z$ eingeführt wird (Vorzeichen und Ursprung). $F_K$ ist die Kraft die von innen auf Grund des Wassers auf die Klappe wirkt.

$$p(z) = p_0 + \rho g s + \rho g z \quad (0 \le z \le h) \qquad (6)$$

$$\begin{aligned}F_K &= \int_0^h p(z) b dz \\ &= b \int_0^h \left[(p_0 + \rho g s) + \rho g z\right] dz \\ \Rightarrow F_K &= b\left[(p_0 + \rho g s)\,h + \frac{1}{2}\rho g h^2\right] \qquad (7)\end{aligned}$$

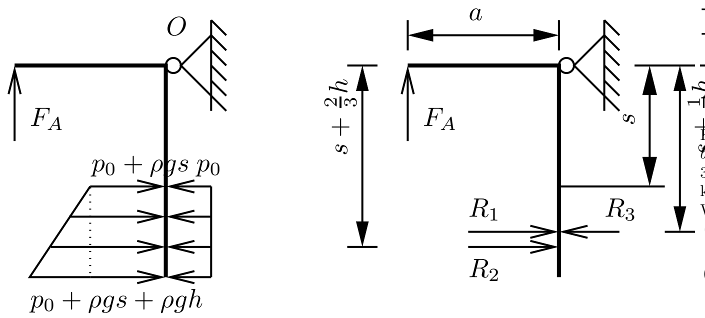
**(c)** Die notwendige Hebelarmlänge $a$ kann aus einem Momentengleichgewicht um $O$ berechnet werden.

$$\begin{aligned}\sum M^O \overset{!}{=} 0 &= aF_A - \int_0^h \left[p(z) - p_0\right](s+z)\,b dz \\ \Rightarrow aF_A &= b\int_0^h \rho g\,(s+z)^2\,dz \\ &= b\rho g \int_0^h \left[s^2 + 2sz + z^2\right] dz \\ &= b\rho g\left[s^2 h + sh^2 + \frac{1}{3}h^3\right] \qquad (8)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = \frac{8\left[s^2 h + sh^2 + \frac{1}{3}h^3\right]}{\pi d^2}} \qquad (9)$$

Alternativ:

Die Berechnungen der Kräfte und der Momente kann auch graphisch erfolgen.



$$R_1^{Rechteck} = (p_0 + \rho g s) bh \tag{10}$$

$$R_2^{Dreieck} = \frac{1}{2}(\rho g h) bh \tag{11}$$

$$R_3^{Rechteck} = p_0 bh \tag{12}$$

$$\sum M^O \stackrel{!}{=} 0 = aF_A - \left(s + \frac{h}{2}\right)(R_1 - R_3) - \left(s + \frac{2}{3}h\right) R_2$$

$$\Rightarrow aF_A = (\rho g s) bh \left(s + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}(\rho g h) bh \left(s + \frac{2}{3}h\right) \tag{13}$$

$$\Longrightarrow \boxed{a = \frac{8\left[s^2 h + s h^2 + \frac{1}{3}h^3\right]}{\pi d^2}} \tag{14}$$

# Hausaufgaben

## Aufgabe 55

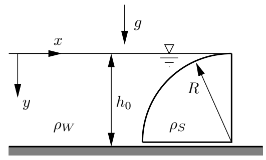
Eine transportable Hochwassersperre sei viertelzylinderförmig mit dem Radius $R$ und der Breite $b$ senkrecht zur Zeichenebene ausgeführt. Sie besteht aus homogenem Material der Dichte $\rho_S = 3 \cdot \rho_W$. Die Sperre liegt lose auf dem Grund. Es sei angenommen, daß zwischen Sperre und Grund kein Wasser eindringt und daß dort der Haftreibungskoeffizient $\mu_0$ wirksam ist. Es soll der höchste Wasserstand $h_0 = R$ betrachtet werden.

(a) Wie groß ist die Horizontalkraft $F_x$ des Wassers auf die Sperre?

(b) Wie groß ist die Vertikalkraft $F_y$ des Wassers auf die Sperre?

(c) Wie groß muss der Haftungskoeffizient $\mu_0$ mindestens sein, damit die Sperre nicht wegrutscht?

(d) Wie verläuft die Wirkungslinie der resultierenden Wasserlast? Gib einen Punkt und die Neigung an.




Geg.: $\rho_W$, $R$, $b$, $g$

Die Formel für den hydrostatischen Druck lautet

$$p(y) = \rho_W g y \tag{15}$$

**(a)** Die Druckkraft des Wassers auf ein kleines Oberflächenelement $dA$ ist

$$d\underline{F} = p(y)\, d\underline{A} \tag{16}$$

Für die x-Komponente der Druckkraft berücksichtigen wir von der Fläche $d\underline{A}$ nur die vertikale Projektion $dA_y$, die in die $yz$-Ebene liegt (und damit für die Kraft in $x$-Richtung verantwortlich ist).

$$dF_x = p(y)\, dA_y \tag{17}$$

Die Projektion $dA_y$ setzt sich aus der Breite des Damms $b$ in $z$-Richtung und einer kleinen Strecke $dy$ in $y$-Richtung zusammen:

$$dA_y = b\, dy \tag{18}$$

(15) und (18) eingesetzt in (17) ergibt:

$$dF_x = \rho_W g b y\, dy \tag{19}$$

Die gesamte Kraft erhalten wir durch bestimmtest Integrieren. Dabei läuft $y$ zwischen 0 (Wasseroberfläche) und $R$ (Grund).

$$F_x = \int_0^R \rho_W g b y\, dy \tag{20}$$

$$F_x = \frac{1}{2}\rho_W g b R^2 \tag{21}$$

**(b)** Auch für die Vertikalkraft des Wassers $F_y$ betrachten wir den Druck auf eine Projektion der Fläche $dA$, diesmal natürlich die Projektion $dA_x$ in der $xz$-Ebene.

$$dF_y = p(y)\, dA_x \tag{22}$$

Auch hier hat die Fläche $dA_x$ wieder die Tiefe $b$ und die Breite $dx$.

$$dA_x = b\, dx \tag{23}$$

(15) und (23) eingesetzt in (22) ergibt:

$$dF_y = \rho_W gby(x)\,dx \tag{24}$$

$$F_y = \int_0^R \rho_W gby(x)\,dx \tag{25}$$

Da $y$ den Abstand von der Wasseroberfläche zur Schleuse angibt und offensichtlich von der Position $x$ abhängt können wir leider nicht so einfach integrieren wie noch bei Gleichung (19). Bei Betrachtung der Funktion (ohne Herleitung)

$$y(x) = R - \sqrt{R^2 - (R-x)^2} \tag{26}$$

fällt bereits auf, dass die Lösung dieses Integrals nicht unbedingt trivial ist (aber natürlich dennoch eine gute Übung, Tipp: Substitution). Mit ein wenig Umformen und Grundkenntnissen der Analysis lässt sich dieser Rechenaufwand aber umgehen. Dazu ziehen wir zunächst die konstanten Faktoren $\rho_W gb$ vor das Integral. Zu lösen bleibt also

$$\int_0^R y(x)\,dx \tag{27}$$

Aus Analysis ist bekannt, dass das Ergebnis dieses Integrals nichts anderes als der Flächeninhalt zwischen der Funktion $y(x)$ und der $x-$Achse ist. In unserem Fall also die Fläche des Wassers über der Schleuse. Diese bestimmen wir einfach, indem wir von dem Quadrat mit Seitenlänge $h_0 = R$ den Viertelkreis der Schleuse abziehen. Der Viertelkreis mit Radius $R$ hat natürlich die Fläche $\frac{1}{4}\pi R^2$. Das Ergebnis entspricht genau dem des gesuchten Integrals.

$$\int_0^R y(x)\,dx = R^2 - \frac{\pi}{4}R^2 = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)R^2 \tag{28}$$

Eingesetzt in (25) ergibt das die Lösung:

$$F_y = \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\rho_W gbR^2 \tag{29}$$

Das selbe Ergebnis erhält man natürlich auch, wenn man das Integral rechnerisch löst. [1]

**(c)** Bisher haben wir lediglich die Druckkraft des Wasser berücksichtig, natürlich drückt aber zusätzlich noch das Eigengewicht die Sperre nach unten. Die Querschnittsfläche der Sperre haben wir bereits mit $\frac{1}{4}\pi R^2$ bestimmt. Mit der Tiefe $b$ und der Dichte $\rho_S = 3\rho_W$ ergibt sich die Masse und damit die Gewichtskraft $G$ (die natürlich in positive $y-$Richtung wirkt)

$$G = \underbrace{\frac{\pi}{4}R^2 b\rho_S}_{\text{Masse}}\,g = \frac{3\pi}{4}R^2 b\rho_W g \tag{30}$$

Die Haftbedingung lautet allgemein

$$H \le \mu_0 N \tag{31}$$

Das statische Kräftegleichgewicht in $x-$Richtung liefert sofort

$$\begin{aligned} H &= F_x \\ H &= \frac{1}{2}\rho_W gbR^2 \end{aligned} \tag{32}$$

Die Normalkraft $N$ erhalten wir aus dem Kräftgleichgewicht in $y-$Richtung

$$\begin{aligned} N &= F_y + G \\ &= \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\rho_W gbR^2 + \frac{3\pi}{4}R^2 b\rho_W g \\ N &= \left(1+\frac{\pi}{2}\right)\rho_W gbR^2 \end{aligned} \tag{33}$$

Gerade noch Haften ist im Grenzfall für $H = \mu_0 N$, dann gilt für $\mu_0$

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{H}{N} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\rho_W gbR^2}{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\rho_W gbR^2} \\ \mu_0 &= \frac{1}{2+\pi} \end{aligned} \tag{34}$$

**(d)** Die $x-$ und $y-$Komponenten der Wasserlast wurden bereits am Anfang dieser Aufgabe bestimmt. Die Resultierende Kraft können wir als Vektor darstellen

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \\ \underline{F} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\rho_W gbR^2 \\ \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\rho_W gbR^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{35}$$

Den Neigungswinkel $\alpha$ (von der $y-$Achse math. positiv) können wir über den Tangens bestimmmen.

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{F_x}{F_y} \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{F_x}{F_y}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}\rho_W gbR^2}{\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\rho_W gbR^2}\right) \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{1}{2-\frac{\pi}{2}}\right) \end{aligned} \tag{36}$$

Die rechnerische Bestimmung eines Punktes auf der Wirkungslinie ist leider nicht so einfach, lässt sich aber wiederum umgehen. Jede kleine Druckkraft $d\underline{F}$ steht immer senkrecht auf der Oberfläche $d\underline{A}$. Zudem geht eine Senkrechte auf der Oberfläche des Viertelzylinders immer auch durch die Ecke, um die der Kreisbogen aufgespannt wird, also quasi den Mittelpunkt des gedachten Vollkreises. Da sie alle durch den selben Punkt gehen, bilden diese vielen Kräfte

[1] Eine vielleicht noch leichtere Möglichkeit für die Bestimmung der Vertikalkraft findet sich in den Vorlesungsnotizen im Kapitel "Der schwimmende Körper"

> Die vertikale Komponente der Kraft ist gleich dem Gewicht der Flüssigkeit, welche sich oberhalb der Fläche befindet

Das entspricht im wesentlichen unserem Rechenweg mit $\rho_W bR^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ als Masse und der Erdbeschleunigung $g$.

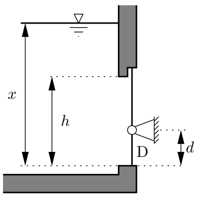
$d\underline{F}$ eine zentrale Kräftegruppe (vgl. Statik/Mechanik I). Die Resultierende dieser Kräfte (und nichts anderes ist $\underline{F}$) ist wiederum eine Kraft deren Wirkungslinie durch den selben Punkt verläuft. Damit ist ein Punkt auf der Wirkungslinie also der Ursprung des Radius.

$$\underline{r}_F = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \tag{37}$$

---

### Aufgabe 56

Eine in einem Wasserbehälter eingebaute Klappe der Höhe $h$ und der Breite $b$ ist im Punkt D um eine horizontale Achse drehbar gelagert.



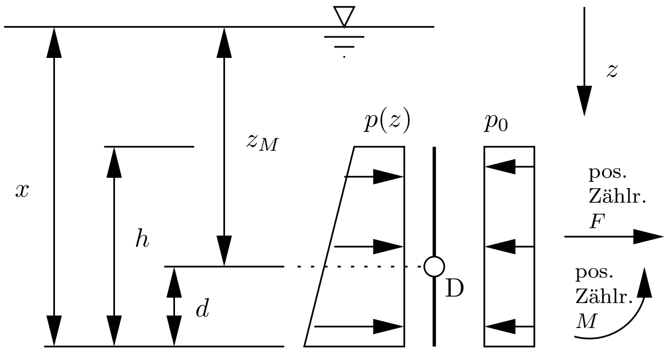

(a) Wie groß ist die resultierende Wasserlast $F$ auf die Klappe in Abhängigkeit von der Höhe $x$ des Wasserspiegels?

(b) Bei welcher Höhe $x$ des Wasserspiegels öffnet sich die Klappe durch die Wasserlast selbsttätig? Stellen Sie Ihr Ergebnis in einem Diagramm dar.

(c) Berechnen Sie nun mit den gegebenen Zahlenwerten, bei welcher Wasserhöhe sich die Klappe öffnet.

Geg.: $h = 1\text{m}$, $d = 0{,}45\text{m}$, $b = 1\text{m}$, $g = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $\rho_{H_2O} = 10^3\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Freischnittskizze für die Klappe und Geometrie:




**(a)** In ruhenden inkompressiblen Flüssigkeiten unter Schwerkrafteinfluß nimmt der Druck mit der Flüssigkeitstiefe linear zu:

$$p(z) = p_0 + \rho g z \tag{38}$$

Die resultierende Kraft berechnet sich als Integral des Druckes mal Normalenvektor auf die Oberfläche über die gesamte Oberfläche. Da hier nur zwei nennenswerte Oberflächen (innen und außen) mit parallelen Normalenvektoren vorhanden sind, ergibt sich (wenn der Flüssigkeitsspiegel über der Klappenoberkante ist):

$$\begin{aligned} F = \int_{x-h}^{x} [p(z) - p_0]\, b dz = b\rho g \left[\frac{z^2}{2}\right]_{x-h}^{x} \\ = bh\rho g\left(x - \frac{h}{2}\right) \end{aligned} \tag{39}$$

**(b)** Die Klappe öffnet sich, wenn das Moment um die Drehachse $M$ negativ wird

$$M = \int_{x-h}^{x} [p(z) - p_0]\,(z - z_m) b dz \tag{40}$$

mit $z_M = (x - d)$ :

$$\begin{aligned} M &= \rho g b\left[\frac{z^3}{3} - (x-d)\frac{z^2}{2}\right]_{x-h}^{x} \\ &= \rho g b\left[h\left(d - \frac{h}{2}\right)x + h^2\left(\frac{h}{3} - \frac{d}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{41}$$

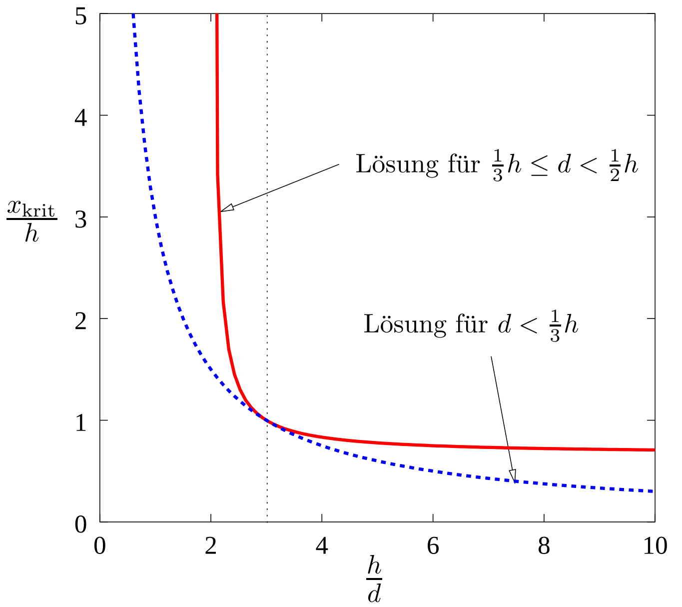
Da der Wasserdruck mit der Tiefe immer zunimmt, kann die Klappe in keinem Fall öffnen, wenn $d \geq \frac{h}{2}$. Deshalb ist zu beachten, daß $2d - h < 0$ ist:

$$M < 0 \Rightarrow x > \frac{2h^2 - 3dh}{3h - 6d} =: x_{\text{krit}} \tag{42}$$

wenn der Wasserspiegel über $x_{\text{krit}}$ steigt, öffnet sich die Klappe.
Dies ist aber nur eine Teillösung, die einen Wasserspiegel $x > h$ voraussetzt und damit nur für $2 \leq \frac{h}{d} \leq 3$ gilt. Die Teillösung wird durch die rote Kurve im angesprochenen Intervall charakterisiert (siehe Skizze).
Doch was passiert, wenn der Drehpunkt der Klappe sehr weit unten liegt? Gilt $d < \frac{h}{3}$, dann öffnet sich die Klappe bereits bevor der Wasserspiegel die obere Kante der Klappe erreicht. In diesem Fall liegt nämlich eine Dreick-förmige Druckverteilung vor. Der Angriffspunkt der resultierenden Druckkraft liegt bei $\frac{1}{3}x$. Liegt der Kraftangriffspunkt oberhalb des Drehpunktes, dann öffnet sich die Klappe. Daraus folgt:

$$x_{\text{krit}} > 3d, \qquad h > 3d \tag{43}$$

Damit beschreibt die blaugestrichelte Kurve für den Bereich $\frac{h}{d} > 3$ das Lösungsverhalten!




**(c)** Für die gegebenen Zahlenwerte ist $\frac{1}{3}h < d < \frac{1}{2}h$. Wenn der Wasserstand den Wert 2,2 m erreicht, öffnet sich die Klappe.