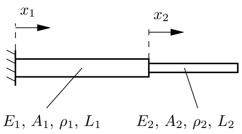
Tutorium

Aufgabe 22

Zwei Stäbe (Längen L_1, L_2 Querschnittsflächen A_1, A_2, E-Moduln E_1, E_2 und Dichten ρ_1, ρ_2) sind wie skizziert miteinander verbunden und links fest eingespannt. Das System schwingt ausschließlich in Längsrichtung.



(a) Wie lauten die Bewegungsdifferentialgleichungen sowie die Rand- und Übergangsbedingungen für die Stablängsschwingungen? Benutze die eingezeichneten Koordinaten x_1 und x_2. Hinweis: Beachte, daß die Stäbe unterschiedliche Dehnsteifigkeiten haben.

(b) Löse die partiellen Differentialgleichungen jeweils mit einem Separationsansatz und formuliere das Eigenwertproblem. Hinweis: Eine Herleitung der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist nicht notwendig.

(c) Wie lautet die Frequenzgleichung? Hinweis: Die Frequenzgleichung braucht nicht gelöst zu werden.

(d) Zeige, daß man bei Aneinanderkopplung zweier identischer Stäbe auf das bekannte Ergebnis

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{2L}$$

kommt, wobei $L = L_1 + L_2$ und c die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit ist.

(a) Es bestehen zwei Bereiche:

Wellengleichung für I.

$$0 \le x_1 \le L_1: \quad \ddot{u}_{\mathrm{I}}(x_1,t) = \frac{E_1}{\rho_1}\, u''_{\mathrm{I}}(x_1,t) \tag{1}$$

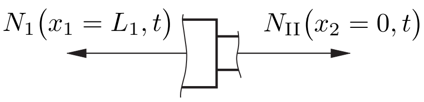
Wellengleichung für II.

$$0 \le x_2 \le L_2: \quad \ddot{u}_{\mathrm{II}}(x_2,t) = \frac{E_2}{\rho_2}\, u''_{\mathrm{II}}(x_2,t) \tag{2}$$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$$u_{\mathrm{I}}(x_1 = 0, t) = 0 \tag{3}$$

$$u_{\mathrm{I}}(x_1 = L_1, t) = u_{\mathrm{II}}(x_2 = 0, t) \tag{4}$$



Newton:

$$N_{\mathrm{I}}(x_1 = L_1, t) = N_{\mathrm{II}}(x_2 = 0, t) \tag{5}$$

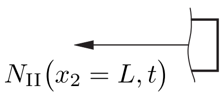
(hier: GGB, da keine Masse als Trägheitsmaß an der Übergangsstelle vorliegt)

mit

$$N(x,t) = EA\, u'(x,t) \tag{6}$$

$$\Rightarrow E_1 A_1 u'_{\mathrm{I}}(x_1 = L_1, t) = E_2 A_2 u'_{\mathrm{II}}(x_2 = 0, t) \tag{7}$$

$$N_{\mathrm{II}}(x_2 = L_2, t) = 0 \leftarrow \text{wiederum keine Trägheit} \tag{8}$$



$$\Rightarrow \quad u'_{\mathrm{II}}(x_2 = L_2, t) = 0 \tag{9}$$

(3), (4), (7), (9), sind die 4 gesuchten Rand- und Übergangsbedingungen

(b) Ansätze:

$$u_{\mathrm{I}}(x_1,t) = X_1(x_1) \cdot T_1(t) \tag{10}$$

$$u_{\mathrm{II}}(x_2,t) = X_2(x_2) \cdot T_2(t) \tag{11}$$

Nach Einsetzen in die Wellengleichung und Seperation von zeit- und ortsabhängigen Ausdrücken ergeben sich gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\ddot{T}_1(t) + \omega_{\mathrm{I}}^2\, T_1(t) = 0 \tag{12}$$

$$X''_1(x_1) + \left(\frac{\omega_{\mathrm{I}}}{c_{\mathrm{I}}}\right)^2 X_1(x_1) = 0 \tag{13}$$

$$\text{mit} \quad c_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}} \quad \text{bzw} \quad k_1 = \frac{\omega_{\mathrm{I}}}{c_{\mathrm{I}}} \tag{14}$$

analog:

$$\ddot{T}_2(t) + \omega_{\mathrm{II}}^2\, T_2(t) = 0 \tag{15}$$

$$X''_2(x_2) + \left(\frac{\omega_{\mathrm{II}}}{c_{\mathrm{II}}}\right)^2 X_2(x_2) = 0 \tag{16}$$

$$\text{mit} \quad c_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}} \quad \text{bzw} \quad k_2 = \frac{\omega_{\mathrm{II}}}{c_{\mathrm{II}}} \tag{17}$$

Mit Hilfe eines harmonischen Ansatzes kann man diese gewöhnliche Dgln. lösen. Das führt auf:

$$T_1(t) = \tilde{A}_1 \cos(\omega_{\mathrm{I}} t + \varphi_1) \tag{18}$$

$$T_2(t) = \tilde{A}_2 \cos(\omega_{\mathrm{II}} t + \varphi_2) \tag{19}$$

$$X_1(x_1) = B_1 \cos(k_{\mathrm{I}} x_1) + D_1 \sin(k_{\mathrm{I}} x_1) \tag{20}$$

$$X_2(x_2) = B_2 \cos(k_{\mathrm{II}} x_2) + D_2 \sin(k_{\mathrm{II}} x_2) \tag{21}$$

Achtung: $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$, sind Koeffizienten der Zeitfunktionen. A_1 und A_2 sind die Querschnittsflächen

Die Anpassung an Randbedingungen stellt ein Eigenwertproblem dar.

$$\text{aus (3)} \Rightarrow \; B_1 = 0 \tag{22}$$

$$\text{aus (4)} \Rightarrow \; D_1 \sin(k_{\mathrm{I}} L_1) \cdot \tilde{A}_1 \cos(\omega_{\mathrm{I}} t + \varphi_1) \overset{!}{=} B_2 \tilde{A}_2 \cos(\omega_{\mathrm{II}} t + \varphi_2) \tag{23}$$

$$\text{bzw.} \quad \Rightarrow \; D_1 \sin(k_{\mathrm{I}} L_1) = B_2\, \frac{\tilde{A}_2 \cos(\omega_{\mathrm{II}} t + \varphi_2)}{\tilde{A}_1 \cos(\omega_{\mathrm{I}} t + \varphi_1)} \tag{24}$$

Dlg.(24) muß aber zu allen Zeiten erfüllt sein

$$\Rightarrow T_1(t) = T_2(t) \tag{25}$$

$$\boxed{\omega = \omega_{\mathrm{I}} = \omega_{\mathrm{II}}} \quad (\text{bzw.}\, \varphi_1 = \varphi_2) \tag{26}$$

Voraussetzung für ein System mit linearen Eigenschaften!

$$\Rightarrow D_1 \sin(k_{\mathrm{I}} L_1) - B_2 = 0 \tag{27}$$

$$\text{aus (7)} \Rightarrow \; E_1 A_1 k_{\mathrm{I}} D_1 \cos(k_{\mathrm{I}} L_1) = E_2 A_2 k_{\mathrm{II}} D_2$$

$$\Rightarrow \; D_1 E_1 A_1 k_{\mathrm{I}} \cos(k_{\mathrm{I}} L_1) - D_2 E_2 A_2 k_{\mathrm{II}} = 0 \tag{28}$$

$$\text{aus (9)} \Rightarrow \; -B_2 k_{\mathrm{II}} \sin(k_{\mathrm{II}} L_2) + D_2 k_{\mathrm{II}} \cos(k_{\mathrm{II}} L_2) = 0 \tag{29}$$

Glgn. (27), (28) und (29) bilden ein homogenes Gleichungssystem mit 4 unbekannten $\big(B_2, D_1, D_2, [\omega]\big)$:

$$\text{mit} \quad c_1 := \cos\big(k_\mathrm{I} L_1\big) \qquad c_2 := \cos\big(k_\mathrm{II} L_2\big) \tag{30}$$

$$s_1 := \sin\big(k_\mathrm{I} L_1\big) \qquad s_2 := \sin\big(k_\mathrm{II} L_2\big) \tag{31}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & s_1 & 0 \\ 0 & E_1 A_1 k_\mathrm{I} c_1 & -E_2 A_2 k_\mathrm{II} \\ -k_\mathrm{II} s_2 & 0 & k_\mathrm{II} c_2 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} B_2 \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}}_{\underline{c}} = \underline{0}$$

Ein Gleichungssystem der Form

$$\underline{A} \cdot \underline{c} = \underline{0}$$

hat nur Lösungen wenn $\det \underline{A} \stackrel{!}{=} 0$ ist!

(4 Unbekannte, 3Glgn.)

(c) Lösung des Eigenwertproblems:

$$\det \underline{A} \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow -E_1 A_1 k_\mathrm{I} k_\mathrm{II} \cos\big(k_\mathrm{I} L_1\big) \cos\big(k_\mathrm{II} L_2\big)$$

$$+ E_2 A_2 k_\mathrm{II}^2 \sin\big(k_\mathrm{I} L_1\big) \sin\big(k_\mathrm{II} L_2\big) \stackrel{!}{=} 0 \tag{32}$$

$$\Rightarrow \; +E_1 A_1 k_\mathrm{I} = E_2 A_2 k_\mathrm{II} \tan\big(k_\mathrm{I} L_1\big) \cdot \tan\big(k_\mathrm{II} L_2\big) \tag{33}$$

Frequenzgleichung

$$\frac{E_1 A_1}{c_\mathrm{I} \tan\Big(\frac{\omega}{c_\mathrm{I}} L_1\Big)} - \frac{E_2 A_2}{c_\mathrm{II}} \tan\Big(\frac{\omega}{c_\mathrm{II}} L_2\Big) = 0 \tag{34}$$

(d) <u>Gegeben:</u>

$$\left.\begin{array}{l} E_1 = E_2 \; ; \; \rho_1 = \rho_2 \\ A_1 = A_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \; c_\mathrm{I} = c_\mathrm{II} = c \tag{35}$$

$$L = L_1 + L_2 \qquad\qquad k_\mathrm{I} = k_\mathrm{II} = k$$

<u>Zu zeigen:</u>

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{2L} \tag{36}$$

Einsetzen der gegebenen Vereinfachungen in (32)

$$\Rightarrow \; -\cos\big(k\, L_1\big) \cos\big(k\, L_2\big) + \sin\big(k\, L_1\big) \sin\big(k\, L_2\big) \stackrel{!}{=} 0 \tag{37}$$

mit dem Additionstheorem

$$\cos\big(\alpha + \beta\big) = \cos\alpha\, \cos\beta - \sin\alpha\, \sin\beta \tag{38}$$

folgt:

$$\cos\Big(k\big(L_1 + L_2\big)\Big) \stackrel{!}{=} 0 \tag{39}$$

$$\cos\Big(\frac{\omega}{c}\, L\Big) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\omega_k}{c} L = \frac{(2k-1)}{2}\pi \quad \text{mit} \;\; k = 1, 2, ...$$

spezielle Frequenzglg.

Die erste Eigenfrequenz ergibt sich für $k = 1$:

$$\boxed{\omega_1 = \frac{\pi c}{2L}} \tag{40}$$