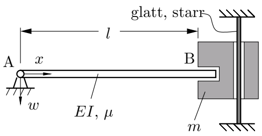
Tutorium

Aufgabe 29

Ein Balken (Länge l, Massebelegung μ, Biegesteifigkeit EI) ist bei A gelenkig gelagert und bei B in eine Hülse gesteckt, die dem Balken dort eine horizontale Tangente aufzwingt. Die Hülse (Masse m) kann auf einer starren Stange in vertikaler Richtung reibungsfrei gleiten. Der Balken schwingt ausschließlich in Querrichtung.



(a) Wie lauten die Bewegungsdifferentialgleichung und die zugehörigen Randbedingungen? *Hinweis: Keine Herleitung notwendig.*

(b) Wie lautet die Frequenzgleichung? *Hinweis: Die Frequenzgleichung braucht nicht gelöst zu werden.*

Geg.: EI, μ, l, m

(a) Bewegungsdifferentialgleichung mit zugehörigen Randbedingungen

Bewegungsdifferentialgleichung

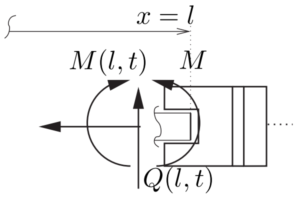
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \qquad (1)$$

Randbedingungen

$$w(0,t) = 0 \qquad (2)$$

$$M(0,t) = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{(0,t)} = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{(l,t)} = 0 \qquad (4)$$



Schwerpunktsatz in positive w-Richtung:

$$m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big|_{(l,t)} = -Q(l,t) = EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{(l,t)} \qquad (5)$$

Produktansatz

$$w(x,t) = X(x)T(t) \qquad (6)$$

Einsetzen in Gl. (1) mit den Abkürzungen

$$c_B := \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad \text{und} \quad \lambda := \sqrt{\frac{\omega}{c_B}} \qquad (7)$$

ergibt

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -c_B^2\frac{X''''}{X} = -\omega^2 \qquad (8)$$

$$\Longrightarrow \ddot{T} + \omega^2 T = 0 \qquad (9)$$

$$\Longrightarrow X'''' - \lambda^4 X = 0 \qquad (10)$$

allgemeine Lösung von Gl. (10) mit den Unbekannten $\beta_1, \ldots, \beta_4; \lambda(\omega)$:

$$X(x) = \beta_1 \cosh \lambda x + \beta_2 \sinh \lambda x ... \qquad (11)$$

$$... + \beta_3 \cos \lambda x + \beta_4 \sin \lambda x \qquad (12)$$

Randbedingungen

$$(2) \to 0 = X(0)$$
$$(3) \to 0 = X''(0)$$
$$(4) \to 0 = X'(l)$$
$$(5) \to 0 = m\omega^2 X(l) + EIX'''(l) \quad \text{(wg. (9))!}$$

(b) Frequenzgleichung

$$\begin{aligned} X(0) = X''(0) = 0 &\Rightarrow \beta_1 = \beta_3 = 0 \\ X'(l) &= 0 \\ \Rightarrow \beta_2 \cosh \lambda l + \beta_4 \cos \lambda l &= 0 \\ m\omega^2 X(l) + EIX'''(l) &= 0 \\ \Rightarrow (m\omega^2 \sinh \lambda l + EI\lambda^3 \cosh \lambda l)\beta_2 ... \\ ... + (m\omega^2 \sin \lambda l - EI\lambda^3 \cos \lambda l)\beta_4 &= 0 \end{aligned}$$

Mit Abkürzungen für die trig. und hyperb. Funktionen ist die notw. Bedingung für nichttriviale Lösungen ($\beta_2, \beta_4 \neq 0$):

$$\begin{vmatrix} \mathrm{ch}_{\lambda l} & \mathrm{c}_{\lambda l} \\ m\omega^2 \mathrm{sh}_{\lambda l} + EI\lambda^3 \mathrm{ch}_{\lambda l} & m\omega^2 \mathrm{s}_{\lambda l} - EI\lambda^3 \mathrm{c}_{\lambda l} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow m\omega^2(\tanh \lambda l - \tan \lambda l) + 2EI\lambda^3 = 0$$

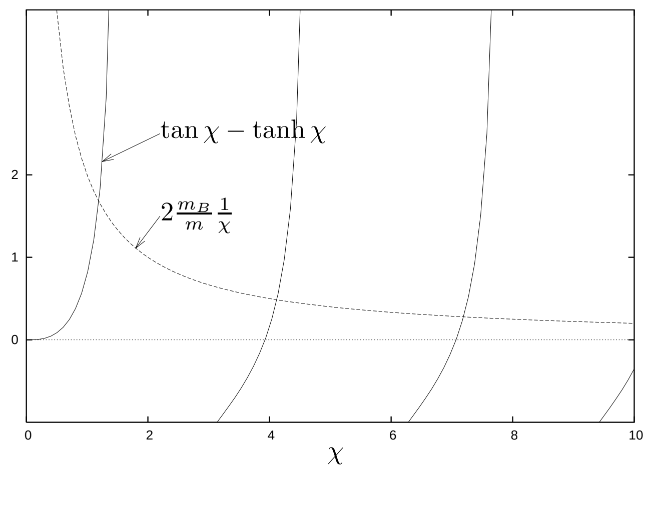
$$\text{mit} \quad \chi := \lambda l; \quad m_B := \mu l \quad \text{folgt:}$$

$$\boxed{\tan \chi - \tanh \chi = 2\frac{m_B}{m}\frac{1}{\chi}}$$

Dies ist die gesuchte Frequenzgleichung. Beachte dabei die Definition von λ in Gl. (7).

<u>Grafische Lösung:</u>

Manchmal kann man eine grafische Lösung gewinnen, indem man die linke und die rechte Seite der Frequenzgleichung geeignet aufträgt und Schnittpunkte sucht. Hier ist das geschehen für das Massenverhältnis $\frac{m_B}{m} = 1$:

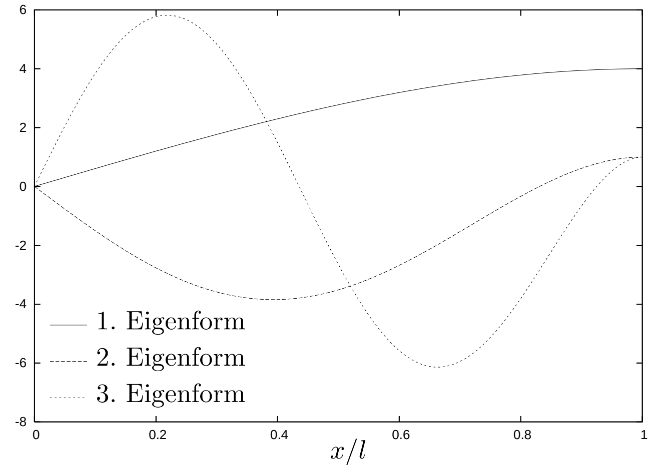


Eigenformen

Die Eigenformen genügen der folgenden Gleichung:

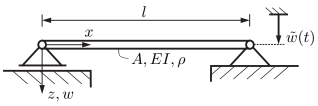
$$X(x) = \beta_2 \left(\sinh \lambda x - \frac{\cosh \lambda l}{\cos \lambda l} \sin \lambda x \right) \tag{13}$$

Die ersten drei Eigenformen:



Aufgabe 43

Der skizzierte massebehaftete Balken wird durch eine periodische Auslenkung $\tilde{w}(t)$ des rechten Lagers in Biegeschwingungen versetzt. Die Schwerkraft wird dabei vernachlässigt.
Geg.: $A, EI, \rho, l, \tilde{w}(t) = w_0 \sin \Omega t$



(a) Zeigen Sie an einem infinitesimal kleinen Stück des Balkens, dass die Biegeschwingung für den Euler-Bernoulli-Balken durch die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + {c_B}^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$ beschrieben wird. Bestimmen Sie die Konstante c_B.

(b) Formen Sie die Differentialgleichung mit einem Bernoulli-Ansatz in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen um und geben Sie deren allgemeine Lösungen an.

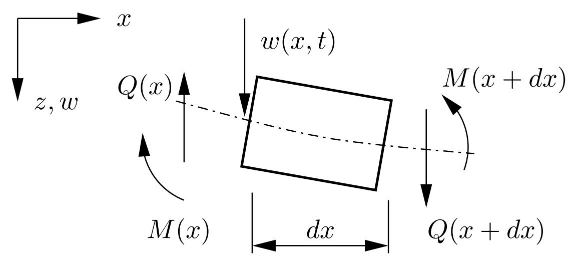
(c) Formulieren Sie die geometrischen und die dynamischen Randbedingungen.

(d) Bestimmen Sie die Durchbiegung $w(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand.

(e) Ermitteln Sie die Kreisfrequenzen Ω_R, bei denen Resonanz auftritt.

Hinweis: Der Hyperbelsinus ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend und hat eine Nullstelle bei Null.

(a)



Das zweite Newtonsche Gesetz für das skizzierte Balkenelement lautet:

$$dm \cdot \left. \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right|_{(x,t)} = Q(x+dx) - Q(x) \tag{14}$$

mit $dm = \rho A dx$ und $\frac{Q(x+dx)-Q(x)}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ergibt sich

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{15}$$

Wegen $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$ (Drehträgheit des infitesimalen Balkenelements vernachlässigbar) und dem Materialgesetz $M = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ergibt sich für konstantes ρ, A, E, I die DGl

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_B^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad \text{mit} \quad c_B := \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \tag{16}$$

Das war zu zeigen.

(b) Mit dem Separationsansatz nach Bernoulli

$$w(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{17}$$

ergeben sich die beiden gewöhnlichen DGL

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad \text{und} \tag{18}$$

$$X'''' - \lambda^4 X = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda := \sqrt{\frac{\omega}{c_B}}. \tag{19}$$

Die gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen (18) und (19) werden mit einem Exponentialansatz gelöst. Es ergeben sich die allgemeinen Lösungen

$$T(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t \quad \text{und} \tag{20}$$

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x + C \cosh \lambda x + D \sinh \lambda x \tag{21}$$

mit den unbekannten Koeffizienten $A, \ldots, D, U, V$.

(c) Die Randbedingungen des Balkens sind:

$$w(x=0,t) = 0 \tag{RB 1}$$

$$w''(x=0,t) = 0 \tag{RB 2}$$

$$w(x=l,t) = w_0 \sin \omega t \tag{RB 3}$$

$$w''(x=l,t) = 0 \tag{RB 4}$$

(d) Im eingeschwungenen Zustand schwingt der Balken mit der Frequenz der äußeren Anregung. Da es auf die Phasenverschiebung nicht ankommt, lässt sich die Zeitfunktion annehmen zu

$$T(t) = \sin \Omega t. \tag{22}$$

Durch Auswertung der Randbedingungen (RB 1) und (RB 2) folgt unmittelbar

$$\text{(RB 1):} \quad A + C = 0 \tag{23}$$

$$\text{(RB 2):} \quad -A + C = 0. \tag{24}$$

Daher muss gelten $A = C = 0$ und die Ortsfunktion vereinfacht sich zu

$$X(x) = B \sin \lambda x + D \sinh \lambda x \tag{25}$$

Des Weiteren ergibt die Auswertung der Randbedingungen (RB 3) und (RB 4):

$$\text{(RB 3):} \quad -B \sin \lambda l + D \sinh \lambda l = 0 \tag{26}$$

$$\text{(RB 4):} \quad B \sin \lambda l + D \sinh \lambda l = w_0. \tag{27}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der Gleichungen (26) und (27) lassen sich die verbleibenden Koeffizienten der Ortsfunktion bestimmen:

$$D = \frac{w_0}{2\sinh\lambda l} \quad \text{und} \tag{28}$$
$$B = \frac{w_0}{2\sin\lambda l}. \tag{29}$$

Somit lautet die Ortsfunktion

$$X(x) = \frac{w_0}{2}\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda l} + \frac{\sinh\lambda x}{\sinh\lambda l}\right). \tag{30}$$

und die Durchbiegung ist

$$w(x,t) = \frac{w_0}{2}\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda l} + \frac{\sinh\lambda x}{\sinh\lambda l}\right)\sin\Omega t. \tag{31}$$

(e) Gleichung (31) lässt sich umformen zu

$$w(x,t) = \frac{\frac{w_0}{2}(\sinh\lambda l\sin\lambda x + \sin\lambda l\sinh\lambda x)\sin\Omega t}{\sin\lambda l\sinh\lambda l} \tag{32}$$

Im Resonanzfall wächst die Amplitude über alle Grenzen. Das ist der Fall, wenn die Erregerfrequenz Ω gerade eine Polstelle von Gleichung (32) ist , also wenn

$$\sin\lambda l\sinh\lambda l = 0 \tag{33}$$

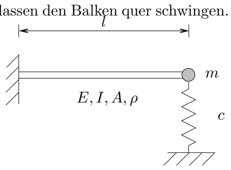
gilt. Da der Hyperbelsinus seine einzige Nullstelle bei Null hat, führt das auf die Bestimmungsgleichung

$$\sin\lambda l = 0 \quad \text{also} \tag{34}$$
$$\Leftrightarrow \lambda l = k\pi, k \in \mathbb{N} \tag{35}$$
$$\Leftrightarrow \Omega_R = \frac{k^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{36}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 32

Ein einseitig eingespannter, massebehafteter Balken trägt am freien Ende eine Einzelmasse und ist dort mit einer Feder abgestützt. Geeignete Anfangsbedingungen lassen den Balken quer schwingen.



(a) Forme die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -c_Q^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ mit $c_Q^2 = \frac{EI}{\rho A}$ um in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen!

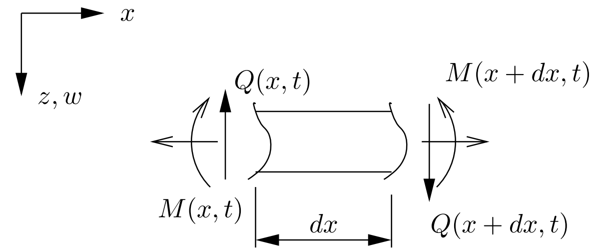
(b) Bestimme die allgemeine Lösung der Ortsfunktion mit einem Exponentialansatz!

(c) Formuliere die geometrischen und dynamischen Randbedingungen!

(d) Stelle die Frequenzgleichung auf, und gib eine Bestimmungsgleichung für die Eigenformen an!

Gegeben seien die Größen: l, m, c, E, I, A, ρ

Herleitung der Bewegungsdifferentialgleichung:



Das zweite Newtonsche Gesetz für das skizzierte Balkenelement lautet:

$$dm \cdot \left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x,t)} = Q(x+dx,t) - Q(x,t) \tag{37}$$

mit $dm = \rho A dx$ und $Q(x+dx,t) \cong Q(x,t) + \frac{\partial Q}{\partial x}dx$ ergibt sich

$$\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{38}$$

mit $Q = \frac{\partial M}{\partial x}$ und dem Materialgesetz $M = -EI \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ergibt sich für konstantes ρ,A,E,I die DGl

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{39}$$

(a) Separationsansatz nach Bernoulli:

$$w(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{40}$$

Eingesetzt in (39) ergibt

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{41}$$

$$X'''' - \frac{\omega^2}{c_Q^2}X = 0 \tag{42}$$

mit $c_Q^2 = \frac{EI}{\rho A}$ und ω noch zu bestimmende Konstante.

(b) Die gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen (41) und (42) werden mit einem Exponentialansatz gelöst. Die als allgemeine Lösung resultierende Linearkombination der Exponentialfunktionen ist äquivalent zu einer Linearkombination aus Sinus und Kosinus bzw. zusätzlich sinh und cosh.

Für die Zeitfunktion erhalten wir:

$$T(t) = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \tag{43}$$

Für die Ortsfunktion ergibt sich:

$$\begin{aligned} X(x) = B_3 \cosh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x + B_4 \sinh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x \\ + B_5 \cos \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x + B_6 \sin \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x \end{aligned} \tag{44}$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung (39) lautet dann:

$$\begin{aligned} \omega(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(B_{1,k} \cos \omega_k t + B_{2,k} \sin \omega_k t \Big) \\ \Big(B_{3,k} \cosh \sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}} x + B_{4,k} \sinh \sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}} x \\ + B_{5,k} \cos \sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}} x + B_{6,k} \sin \sqrt{\frac{\omega_k}{c_Q}} x \Big) \end{aligned} \tag{45}$$

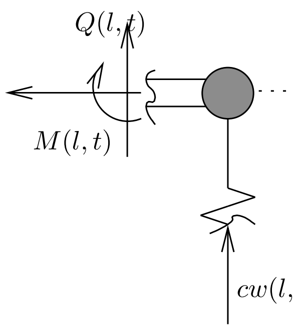
(c) Am linken Rand besteht eine feste Einspannung charakterisiert durch die geometrischen Randbedingungen:

$$w(x=0,t) = 0 \tag{RB 1}$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{(x=0,t)} = 0 \tag{RB 2}$$

Am rechten Rand ergeben sich dynamische Randbedingungen:
Eine Punktmasse hat keine Drehträgheit und die Feder leitet auch kein Moment ein:

$$M(x=l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{(x=l,t)} = 0 \tag{RB 3}$$



Die Querkraft ergibt sich durch Freischneiden der Punktmasse m aus dem zweiten Newtonschen Gesetz (c = Federsteifigkeit):

$$m \left. \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right|_{(x=l,t)} = -Q(l,t) - cw|_{(x=l,t)} \tag{46}$$

mit $Q = -EIw'''$ ergibt sich:

$$m \left. \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right|_{(x=l,t)} = EI \left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_{(x=l,t)} - cw|_{(x=l,t)} \tag{RB 4}$$

(d) Bei Einsetzen der allg. Lösung in die Randbedingungen werden folgende Ableitungen benötigt:

$$\begin{aligned} X''(x) = \frac{\omega}{c_Q} \Big[B_3 \cosh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x + B_4 \sinh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x \\ - B_5 \cos \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x - B_6 \sin \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x \Big] \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} X'''(x) = \big(\frac{\omega}{c_Q} \big)^{\frac{3}{2}} \Big[B_3 \sinh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x + B_4 \cosh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x \\ + B_5 \sin \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x - B_6 \cos \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} x \Big] \end{aligned} \tag{48}$$

$$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t) \tag{49}$$

Jede einzelne Fundamentallösung soll die Randbedingungen zu jeder Zeit erfüllen. Deshalb gilt $\forall k$ mit den Abkürzungen $B_3 := B_{3,k}$, ...:

$$(\text{RB } 1) \Rightarrow \quad B_3 + B_5 = 0 \tag{50}$$

$$(\text{RB } 2) \Rightarrow \quad B_4 + B_6 = 0 \tag{51}$$

und es ergibt sich für (RB 3):

$$\begin{aligned} B_3 \cosh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} l + B_4 \sinh \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} l \\ - \big(-B_3\big) \cos \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} l - \big(-B_4\big) \sin \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} l = 0 \end{aligned} \tag{52}$$

Für (RB 4) ergibt sich auch eine Gleichung für B_3 und B_4, zusammen mit (52) in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = 0 \tag{53}$$

mit

$$\begin{aligned} M_{11} &= \cosh \chi + \cos \chi \\ M_{12} &= \sinh \chi + \sin \chi \\ M_{21} &= -\frac{1}{EI} (m\omega^2 - c) \Big(\cosh \chi - \cos \chi \Big) \\ &\quad - \Big(\frac{\omega}{c_Q} \Big)^{\frac{3}{2}} \Big(\sinh \chi - \sin \chi \Big) \\ M_{22} &= -\frac{1}{EI} (m\omega^2 - c) \Big(\sinh \chi - \sin \chi \Big) \\ &\quad - \Big(\frac{\omega}{c_Q} \Big)^{\frac{3}{2}} \Big(\cosh \chi + \cos \chi \Big) \\ \chi &:= \sqrt{\frac{\omega}{c_Q}} l \end{aligned} \tag{54}$$

Eine Lösung, bei der $B_3 \neq 0$ und $B_4 \neq 0$, kann es nur geben, wenn die Determinante der Matrix verschwindet ($m_B = A\rho l$):

$$M_{11} \, M_{22} - M_{12} \, M_{21} \overset{!}{=} 0 \tag{55}$$

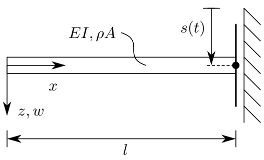
$$\frac{m}{m_B} \chi - \frac{cl^3}{EI} \chi^{-3} = \frac{1 + \cosh \chi \cos \chi}{\cosh \chi \sin \chi - \sinh \chi \cos \chi} \tag{56}$$

Durch numerische Auswertung von (56) mit (54) lassen sich die Eigenfrequenzen ω_k ermitteln.

Die Gleichung (44) beschreibt die Eigenformen, wenn darin die ermittelten Eigenfrequenzen ω_k und die dazugehörigen Koeffizienten $B_3 \dots B_6$ eingesetzt werden.

Aufgabe 42

Ein einseitig eingespannter Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI, Massebelegung μ) werde dadurch in erzwungene Schwingungen versetzt, dass die Einspannung eine harmonische Auf- und Abbewegung mit der Frequenz Ω durchführt. Bestimmen Sie die Durchbiegung $w(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand.



Geg.: l, $EI =$ konst. in x, $\mu =$ konst. in x, $s(t) = s_0 \cos(\Omega t)$, Ω, s_0

<u>Wellengleichung</u>

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_B^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \qquad \text{mit } c_B^2 := \frac{EI}{\mu} \tag{57}$$

<u>Randbedingungen</u>

- *geometrisch (in w oder φ)*

$$w(l,t) = s(t) = s_0 \cos(\Omega t) \quad \forall t \tag{58}$$
$$\varphi(l,t) = w'(l,t) = 0 \quad \forall t \tag{59}$$

- *dynamisch (in M_b oder F_q)*

$$M_b(0,t) \overset{\text{MSG}}{=} -EIw''(0,t) = 0 \quad \forall t \tag{60}$$
$$\Rightarrow \quad w''(0,t) = 0 \quad \forall t \tag{61}$$
$$F_q(0,t) \overset{\text{MSG}}{=} -EIw'''(0,t) = 0 \quad \forall t \tag{62}$$
$$\Rightarrow \quad w'''(0,t) = 0 \quad \forall t \tag{63}$$

<u>Seperationsansatz</u>

$$w(x,t) \doteq X(x)T(t) \quad |\text{in DGL 57 einsetzen} \tag{64}$$

$$\Rightarrow \ddot{T}(t)X(x) + c_B^2 X^{IV}(x)T(t) = 0 \tag{65}$$

$$\Rightarrow -c_B^2 \frac{X^{IV}(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \overset{!}{=} \text{konst.} \doteq -\alpha^2 \tag{66}$$

Es folgen damit zwei gewöhnliche Differentialgleichungen im Ort und in der Zeit:

$$\ddot{T}(t) + \alpha^2 T(t) = 0 \tag{67}$$

$$X^{IV}(x) - \kappa^4 X(x) = 0 \quad \text{mit } \kappa^4 := \left(\frac{\alpha}{c_B}\right)^2 \tag{68}$$

Die allgemeinen Lösungen ergeben sich aus dem Exponentialansatz zu:

$$T(t) = \widetilde{A}\cos(\alpha t) + \widetilde{B}\sin(\alpha t) \tag{69}$$
$$X(x) = A\cos(\kappa x) + B\sin(\kappa x) + C\cosh(\kappa x) + D\sinh(\kappa x) \tag{70}$$

<u>Anpassen der allgemeinen Lösung an die RBn</u>

$$\text{RB 61} \Rightarrow \quad w''(0,t) = \kappa^2 \left[-A + C\right] T(t) \overset{!}{=} 0 \quad \forall t$$
$$\Rightarrow \quad \underline{A = C} \tag{71}$$
$$\text{RB 63} \Rightarrow \quad w'''(0,t) = \kappa^3 \left[-B + D\right] T(t) \overset{!}{=} 0 \quad \forall t$$
$$\Rightarrow \quad \underline{B = D} \tag{72}$$
$$\text{RB 59} \Rightarrow \quad w'(l,t) = \kappa \left[A\left(-\sin(\kappa l) + \sinh(\kappa l)\right) + B\left(\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)\right)\right] T(t) \overset{!}{=} 0 \quad \forall t$$
$$\Rightarrow \quad \underline{B = -A\frac{\sinh(\kappa l) - \sin(\kappa l)}{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}} \tag{73}$$

$$\text{RB 58} \Rightarrow \quad w(l,t) = X(l) \underbrace{\left(\widetilde{A}\cos(\alpha t) + \widetilde{B}\sin(\alpha t)\right)}_{T(t)} \overset{!}{=} s_0 \cos(\Omega t) \quad \forall t \tag{74}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\underline{\widetilde{B} = 0} \quad \text{und} \quad \underline{\alpha = \Omega} \quad \overset{\text{Gl.(68)}}{\Rightarrow} \quad \underline{\kappa^2 = \frac{\Omega}{c_B}} \tag{75}$$

Somit wird aus Gl. 74 und 73:

$$\widetilde{A}X(l) = \widetilde{A} \cdot A\Big[\left(\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)\right) + \dots + \underbrace{\frac{\sin(\kappa l) - \sinh(\kappa l)}{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}}_{B}\left(\sin(\kappa l) + \sinh(\kappa l)\right)\Big] \tag{76}$$

$$= \widetilde{A} \cdot A \left[\frac{\left(\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)\right)^2 + \sin^2(\kappa l) - \sinh^2(\kappa l)}{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}\right] \tag{77}$$

$$= 2\widetilde{A} \cdot A \left[\frac{1 + \cos(\kappa l)\cosh(\kappa l)}{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}\right] \overset{!}{=} s_0 \tag{78}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit lässt sich die folgende Ersetzung machen:

$$G := A \cdot \widetilde{A} \tag{79}$$

Man erhällt also für G:

$$\underline{G = \frac{s_0}{2}\left[\frac{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}{1 + \cos(\kappa l)\cosh(\kappa l)}\right]} \tag{80}$$

Für die Durchsenkung $w(x,t)$ ergibt sich also folgender Zusammenhang:

$$w(x,t) = \frac{s_0}{2}\left(\frac{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}{1 + \cos(\kappa l)\cosh(\kappa l)}\right)\Bigg[\cos(\kappa x) + \cosh(\kappa x) + \dots + \frac{\sin(\kappa l) - \sinh(\kappa l)}{\cos(\kappa l) + \cosh(\kappa l)}\big(\sin(\kappa x) + \sinh(\kappa x)\big)\Bigg]\cos(\Omega t) \tag{81}$$

Setzt man zur Kontrolle $x = l$, so sieht man, dass die Randbedingung 58 erfüllt wird:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{s_0}{2}\left(\frac{\cos(\kappa l)+\cosh(\kappa l)}{1+\cos(\kappa l)\cosh(\kappa l)}\right)\Bigg[\cos(\kappa l)+\cosh(\kappa l)+\dots \\ &+\frac{\sin(\kappa l)-\sinh(\kappa l)}{\cos(\kappa l)+\cosh(\kappa l)}\big(\sin(\kappa l)+\sinh(\kappa l)\big)\Bigg]\cos(\Omega t) \\ &= \frac{s_0}{2}\left(\frac{\cos(\kappa l)+\cosh(\kappa l)}{1+\cos(\kappa l)\cosh(\kappa l)}\right)2\left[\frac{1+\cos(\kappa l)\cosh(\kappa l)}{\cos(\kappa l)+\cosh(\kappa l)}\right]\cos(\Omega t) \\ &= s_0\cos(\Omega t) \end{aligned} \tag{82}$$