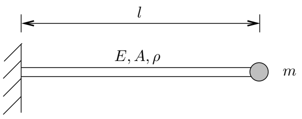
Tutorium

Aufgabe 20

Ein mit Masse belegter Stab ist an einem Ende unverschieblich gelagert, an dem anderen Ende ist eine Einzelmasse befestigt. Der Stab schwingt nach geeigneten Anfangsbedingungen längs.



Gegeben seien die Größen: l, m, E, A, ρ

und $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ mit $c_L^2 = \frac{E}{\rho}$

(a) Wähle einen geeigneten Ansatz, um die partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zu überführen. Begründe und diskutiere dein weiteres Vorgehen bei der Lösung.

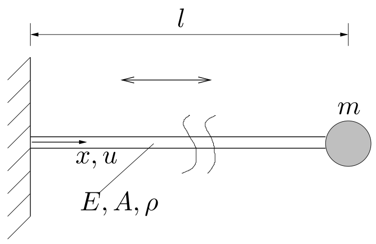
(b) Wie lauten die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen?

(c) Formuliere die geometrischen und dynamischen Rand- und Übergangsbedingungen.

(d) Stelle die Frequenzgleichung auf, und löse sie grafisch.

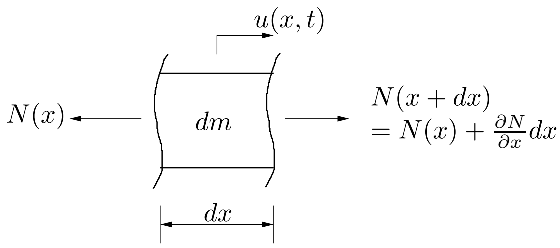
(e) Erläutere den Zusammenhang zwischen den Lösungen der Frequenzgleichung und den Eigenformen.

Longitudinalschwingung



Herleitung der Differentialgleichung:

dazu Freischnitt eines Massenelementes



Impulssatz:

$$dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum F = N(x) + \frac{\partial N}{\partial x}dx - N(x)$$

mit $dm = \rho A dx$

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x}dx$$

geteilt durch dx und mit Hookschem Materialgesetz $N = EA\frac{\partial u}{\partial x}$

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

geteilt durch ρ und A mit $c_L^2 = \frac{E}{\rho}$, es ergibt sich:

$$\underline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{1}$$

homogene, lineare, partielle Dgl. 2. Ordnung

(a) Separationsansatz nach Bernoulli:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{2}$$

wobei $X(x)$ die sogenannte Ortsfunktion und $T(t)$ die Zeitfunktion ist.

Einsetzen in die Dgl. und Teilen durch $X(x)$ und $T(t)$:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c_L^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = const. = -\omega_L^2$$

Die linke Seite der Gleichung ist eine reine Zeitfunktion, die rechte Seite eine reine Ortsfunktion. Linke und rechte Seite der Gleichung können zu allen Zeiten und an allen Orten nur gleich sein, wenn sie gleich einer Konstanten $-\omega_L^2$ sind. So ergeben sich zwei gewöhnliche Dgln.:

$$\ddot{T}(t) + \omega_L^2 T(t) = 0 \tag{3}$$

$$X''(x) + \left(\frac{\omega_L}{c_L}\right)^2 X(x) = 0 \tag{4}$$

(b) allgemeine Lösung dieser Dgln.:

$$T(t) = A_1 \sin \omega_L t + A_2 \cos \omega_L t \tag{5}$$

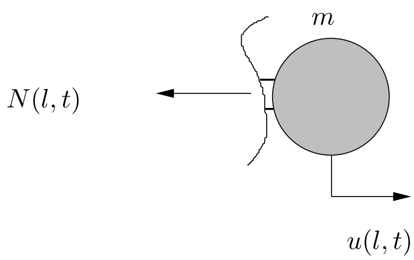
$$X(x) = B_1 \sin \frac{\omega_L}{c_L}x + B_2 \cos \frac{\omega_L}{c_L}x \tag{6}$$

(c) Rand und Übergangsbedingungen:

Geometrische Randbedingung an der Einspannung:

$$u(0,t) = 0 = X(0)T(t) \qquad \text{(RB 1)}$$

$$\Rightarrow X(0) = 0 = B_1 \cdot 0 + B_2 \cdot 1 \ \Rightarrow \underline{B_2 = 0}$$



Impulssatz am rechten Ende des Balkens:

$$m\ddot{u}(l,t) = -N(l,t)$$

mit dem Hookschen Materialgesetz $N(l,t) = EAu'(l,t)$ ergibt sich die dynamische Randbedingung

$$m\ddot{u}(l,t) = -EAu'(l,t)\ . \qquad \text{(RB 2)}$$

(d) Es wird die allgemeine Lösung (2) mit (5) und (6) in die Randbedingungen eingesetzt. Aus (RB 2) ergibt sich (mit $B_2 = 0$ und $\frac{\ddot{T}}{T} = -\omega_L^2$, s. Gl. (3)):

$$\omega_L^2 B_1 \sin \frac{\omega_L}{c_L} l = -\frac{EA}{m}\frac{\omega_L}{c_L} B_1 \cos \frac{\omega_L}{c_L} l \tag{7}$$

$$\frac{\omega_L}{c_L} l \tan \frac{\omega_L}{c_L} l = \frac{EAl}{mc_L^2} = \frac{EA\rho l}{mE} = \frac{m_S}{m} \tag{8}$$

wobei m_S die Masse des Stabes und m die Einzelmasse ist

lösen:

$$\frac{\omega_L}{c_L} l \tan \frac{\omega_L}{c_L} l = \frac{m_S}{m}$$

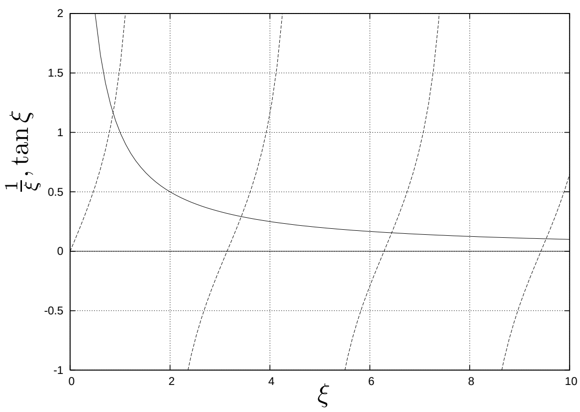
bzw. mit den Abkürzungen $\frac{\omega_L}{c_L} l = \xi$ und $\frac{m_S}{m} = \kappa$

$$\xi \tan \xi = \kappa$$

Geteilt durch ξ ergibt sich die transzendente Gleichung:

$$\underline{\tan \xi = \frac{\kappa}{\xi}} \ ,$$

mit ξ als unbekannter Größe. Diese Gleichung ist nur numerisch oder grafisch lösbar. Für $\kappa = 1$ (die Stabmasse ist gleich der Einzelmasse) ergibt sich z.B.: $\xi_1 = 0{,}86 \quad \Rightarrow$ erste Eigenfrequenz: $\underline{\omega_{L1} = \frac{\xi_1 c_L}{l}}$



Man sieht, es gibt unendlich viele Lösungen für ξ und somit auch unendlich viele Eigenkreisfrequenzen ω_L.

$$\omega_{Lk} = \frac{\xi_k c_L}{l} = \xi_k \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{l}$$

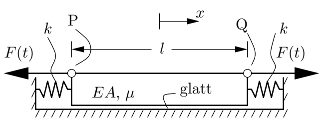
(e) Die Eigenformen werden durch die Ortsfunktion (6) beschrieben, mit $B_2 = 0$:

$$X(x) = B_1 \sin \frac{\omega_L}{c_L} x$$

Offenbar hängen die Eigenformen von ω_L und damit vom Massenverhältnis κ zwischen Stab und Einzelmasse ab.

Aufgabe 38

Ein Dehnstab (Dehnsteifigkeit EA, Massebelegung $\mu = \rho A$, Länge l) stützt sich an seinen beiden Enden ($x = -\frac{l}{2}$ und $x = \frac{l}{2}$) über Federn (Federsteifigkeit k) an der Umgebung ab. In der Ruhelage sind die Federn entspannt. An den Punkten P und Q greifen entgegengesetzt wirkende Kräfte mit dem Betrag $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ an. Die Längsschwingungen $u(x,t)$ des Stabes im eingeschwungenen Zustand sind zu untersuchen.



(a) Wie lautet die die Längsschwingungen beschreibende partielle Differentialgleichung? *Hinweis: Keine Herleitung notwendig.*

(b) Wie lauten die Randbedingungen? *Beachten Sie bitte den Ursprung der Koordinate x!*

(c) Bestimmen Sie nun die Lösung $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand!

(d) Für welche Erregerkreisfrequenzen Ω bewegt sich der Punkt Q nicht?

Geg.: F_0, Ω, EA, μ, l

(a) Die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad c^2 = \frac{EA}{\mu} \tag{9}$$

beschreibt die Längsschwingungen des untersuchten Stabes.

(b) Die Randbedingungen erhält man durch geeignete Schnitte am linken und rechten Rand:

$$0 = N\left(-\frac{l}{2}, t\right) - ku\left(-\frac{l}{2}, t\right) - F(t) \tag{10a}$$

$$0 = -N\left(\frac{l}{2}, t\right) - ku\left(\frac{l}{2}, t\right) + F(t) \tag{10b}$$

Für die Normalkraft $N(x,t)$ gilt der Zusammenhang

$$N(x,t) = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad ,$$

der aus dem Werkstoffgesetz und der Kinematik hergeleitet werden kann.

(c) Zur Berechnung der Längsschwingungen $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand bestimmen wir zunächst eine partikuläre Lösung der DGL. Ansatz:

$$u_p(x,t) = X(x) \cos \Omega t \quad .$$

Die Systemantwort gehorcht also dem gleichen Zeitgesetz, wie die Anregung (Gleichtaktansatz).

Dieser Produktansatz überführt die partielle Differentialgleichung (9) in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad , \quad \lambda = \frac{\Omega}{c} \quad . \tag{11}$$

Die Lösung von (11) lautet bekanntlich

$$X = \alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x \quad . \tag{12}$$

Die Randbedingungen (10) kann man nun für die Ortsfunktion formulieren

$$0 = EAX'\left(-\frac{l}{2}\right) - kX\left(-\frac{l}{2}\right) - F_0 \tag{13a}$$

$$0 = -EAX'\left(\frac{l}{2}\right) - kX\left(\frac{l}{2}\right) + F_0 \tag{13b}$$

Einsetzen von (12) in die Randbedingungen (13) ergibt mit der Abkürzung $\xi = \frac{\lambda l}{2}$ unter Ausnutzung von $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned} F_0 &= EA\lambda(\alpha \sin\xi + \beta \cos\xi) - k(\alpha\cos\xi - \beta\sin\xi) \\ F_0 &= EA\lambda(-\alpha\sin\xi + \beta\cos\xi) + k(\alpha\cos\xi + \beta\sin\xi) \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten α und β. Durch Addieren bzw. Subtrahieren der Gleichungen erhält man unmittelbar die Forderungen, die an α und β für alle Zeiten gestellt werden:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \quad , \\ \beta &= \frac{F_0}{EA\lambda \cos\frac{\lambda l}{2} + k \sin\frac{\lambda l}{2}} \quad . \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung ergibt sich nun durch Einsetzen der berechneten Konstanten α und β

$$u_p(x,t) = \frac{F_0 \sin \lambda x}{EA\lambda \cos \frac{\lambda l}{2} + k \sin \frac{\lambda l}{2}} \cos \Omega t \quad , \tag{15}$$

mit

$$\lambda = \frac{\Omega}{c} \quad , \quad c^2 = \frac{EA}{\mu} \quad .$$

Die allgemeine Lösung erhält man durch Superposition dieser partikulären Lösung mit der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Bei reellen Systemen existiert stets eine Dämpfung (auch wenn diese im vorliegenden Modell nicht abgebildet ist). Daher klingt die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ab und nach genügend langer Zeit (=eingeschwungener Zustand) verbleibt allein die partikuläre Lösung. Somit beschreibt (15) das Verhalten das Systems im eingeschwungenen Zustand. Der Verlauf der Verschiebung ist sinusförmig und oszilliert mit Ω. Die Amplitude hängt von Systemgrößen wie k und EA, aber auch von der Abstimmung der Erregung auf die Systemgrößen ab.

(d) Der Punkt Q bewegt sich nicht, wenn

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\left(\frac{l}{2},t\right)} = 0$$

für alle Zeiten t. D.h.

$$\sin \frac{\lambda l}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Omega = \frac{2n\pi c}{l} \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für diese Frequenzen ist der Nenner der Ortsfunktion ungleich 0.

Hausaufgaben

Aufgabe 23

Es soll das Eigenschwingverhalten des Systems Förderkorb/Seil einer Schachtanlage untersucht werden. Seil und Förderkorb schwingen in guter Näherung nur in vertikaler Richtung.

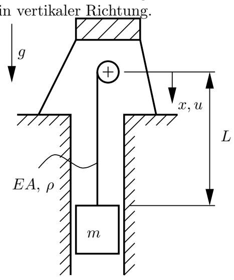
(a) Stellen Sie das zweite Newtonsche Gesetz für ein infinitesimales Seilstück auf. Die lokale Verschiebung des Seils in x-Richtung sei $u(x,t)$. Leiten Sie dann mit dem Hookeschen Materialgesetz $N = EA\frac{\partial u}{\partial x}$ die Bewegungsdifferentialgleichung für das dargestellte System her.

(b) Geben Sie die Randbedingungen für das System an! (*Hinweis:* *Endmasse freischneiden.*)

(c) Bestimmen Sie die statische Ruhelage $u_0(x)$ des Systems!

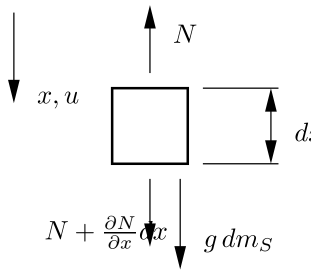
(d) Wie lauten die Differentialgleichung und die Randbedingungen mit der neuen Variablen $\tilde{u} = u - u_0$?

(e) Wie groß ist die erste Eigenfrequenz des Systems, wenn der Förderkorb in Schwingung gerät? Verwenden Sie die Gleichungen aus Teil (d)!



Geg.: L, E, A, ρ, m, g

(a)



Masse des Seilstücks:

$$dm_S = \rho \, A \, dx \tag{16}$$

Zweites Newtonsches Gesetz
(Masse · Beschleunigung = $\sum$ äußere Kräfte):

$$dm_S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = N + \frac{\partial N}{\partial x} dx + g \, dm_S - N = \frac{\partial N}{\partial x} dx + g \, dm_S \tag{17}$$

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \frac{\partial N}{\partial x} dx + g \, \rho \, A \, dx \tag{18}$$

Materialgesetz $N = EA\frac{\partial u}{\partial x}$ einsetzen:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + g \, \rho \, A \, dx \tag{19}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g\rho \tag{20}$$

Bewegungsdifferential-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \qquad \text{mit } c^2 = \frac{E}{\rho} \tag{21}$$

(b) Am oberen Ende keine Verschiebung:

$$u(x=0,t) = 0 \qquad \forall t \tag{RB 1}$$

Am unteren Ende hängt nur noch eine Einzelmasse. Das zweite Newtonsche Gesetz für diese Masse liefert:

$$m \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=l} = -N(x=l) + mg \tag{22}$$

Mit dem Materialgesetz für das Seil $N = EA\frac{\partial u}{\partial x}$ ergibt sich:

$$m \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=l} + EA \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = mg \qquad \forall t \tag{RB 2}$$

(c) Im Gleichgewicht ruht das System: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Eingesetzt in die Bewegungsdifferential-Gleichung (21):

$$\frac{d^2u_0}{dx^2} = -\frac{g}{c^2} \tag{23}$$

$$u_0(x) = -\frac{g}{2c^2}x^2 + Dx + E \tag{24}$$

(RB 1) ergibt $E = 0$:

$$u_0(x) = -\frac{g}{2c^2}x^2 + Dx \tag{25}$$

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ und (25) eingesetzt in (RB 2)

$$\Rightarrow D = g\Big(\frac{m}{EA} + \frac{l}{c^2}\Big) \tag{26}$$

Wir erhalten:

$$u_0(x) = -\frac{g}{2c^2}x^2 + \Big(\frac{mg}{EA} + \frac{lg}{c^2}\Big)x \tag{27}$$

(d)

$$\tilde{u} = u - u_0 \Leftrightarrow \quad u = \tilde{u} + u_0 \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - \frac{g}{c^2} \tag{30}$$

Einsetzen in (21) ergibt die transformierte Bewegungsdifferential-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \tag{31}$$

Analog ergeben sich auch die transformierten Randbedingungen:

$$\tilde{u}(x=0,t) = 0 \tag{RBT 1}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}\Big|_{x=l} + \frac{EA}{m}\cdot\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \tag{RBT 2}$$

(e) Die partielle Dgl. (31) kann mithilfe des Produktansatzes von Bernoulli in zwei gewöhnliche Dgln. überführt werden, von denen man die allgemeinen Lösungen kennt. Das führt auf die allgemeine Lösung

$$\tilde{u}_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x) \quad \text{mit} \tag{32}$$

$$T_k(t) = B_k \sin\omega_k t + C_k \cos\omega_k t, \tag{33}$$

$$X_k(x) = D_k \sin\frac{\omega_k}{c}x + E_k \cos\frac{\omega_k}{c}x \tag{34}$$

und (unendlich vielen) noch zu bestimmenden Konstanten $B_k, \ldots, E_k$ und Eigenfrequenzen ω_k.

Die erste Randbedingung (RBT 1) ergibt:

$$E_k = 0 \tag{35}$$

Mit der Abkürzung $\xi = \frac{EA}{m}$ ergibt die zweite Randbedingung (RBT 2) mit $E_k = 0$:

$$-\omega_k^2 T_k \cdot D_k \sin\frac{\omega_k}{c}l + \xi T_k D_k\frac{\omega_k}{c}\cos\frac{\omega_k}{c}l = 0$$

$$T_k(t)D_k(-\omega_k^2 \sin\frac{\omega_k}{c}l + \xi\frac{\omega_k}{c}\cos\frac{\omega_k}{c}l) = 0$$

Diese Gleichung ist für jedes k auszuwerten. Die Gleichung soll $\forall t$ gelten, und im Allgemeinen ist $T_k(t) \neq 0$. $D_k = 0$ bedeutet die triviale Lösung und scheidet damit aus. Es bleibt, dass der Klammerausdruck zu Null werden muss, damit die zweite Randbedingung (und gleichzeitig die erste) gelten. Es ist also zu fordern

$$\omega_k^2 \sin\frac{\omega_k}{c}l = \xi\frac{\omega_k}{c}\cos\frac{\omega_k}{c}l$$

$$\frac{\omega_k}{c}l\sin\frac{\omega_k}{c}l = \frac{\xi l}{c^2}\cos\frac{\omega_k}{c}l$$

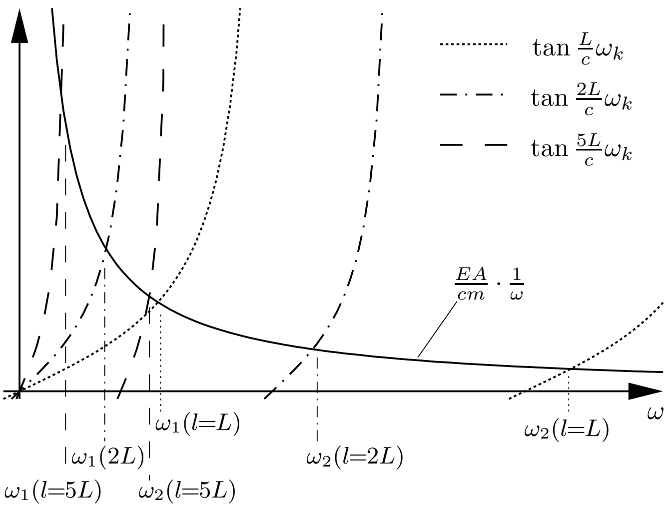
und mit der Abkürzung $\eta = \frac{\omega_k}{c}l$

$$\tan\eta = \frac{\xi l}{\eta c^2}$$

Oder ausgeschrieben:

$$\tan\frac{l}{c}\omega_k = \frac{EA}{cm}\cdot\frac{1}{\omega_k} \tag{36}$$

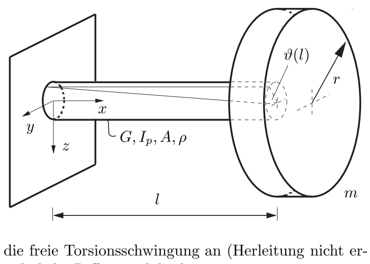
Das folgende Diagramm zeigt die grafischen Lösungen für $l = L,\ l = 2L$ und $l = 5L$



Aufgabe 26

Ein eingespannter, massebehafteter Stab mit kreisförmigem Querschnitt trägt an seinem Ende eine Einzelmasse. Geeignete Anfangsbedingungen lassen den Stab um seine Längsachse schwingen.

Geg.: l, m, G, I_p, A, ρ, r



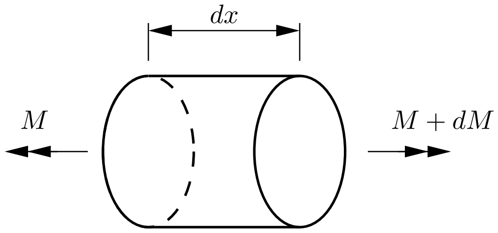
(a) Geben Sie die Differentialgleichung für die freie Torsionsschwingung an (Herleitung nicht erforderlich) und formen Sie diese in 2 gewöhnliche Differentialgleichungen um.

(b) Wie lauten die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen? Wie lautet die Lösung der partiellen Differentialgleichung?

(c) Formulieren Sie die geometrischen und die dynamischen Randbedingungen.

(d) Stellen Sie die Frequenzgleichung auf und skizzieren Sie, wie sich die ersten Eigenkreisfrequenzen grafisch bestimmen lassen.

(a)



Materialgesetz:

$$GI_p \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = M \tag{37}$$

Drehimpulssatz zu einem bestimmten Zeitpunkt:

$$dJ_{\text{stab}} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = -M + M + dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx \tag{38}$$

mit $dJ_{\text{stab}} = I_p \rho \, dx$ und $c_D^2 = \frac{G}{\rho}$ ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = c_D^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \tag{39}$$

Setze den Produktsatz nach Bernoulli

$$\vartheta(x,t) = X(x)T(t) \tag{40}$$

in die Wellendifferentialgleichung (39) ein:

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c_D^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = konst. \; (= -\omega^2) \tag{41}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \\ X''(x) + \frac{\omega^2}{c_D^2} X(x) &= 0 \end{aligned} \tag{42}$$

(b) Lösungen für (42):

$$\begin{aligned} T(t) &= z_1 \sin \omega t + z_2 \cos \omega t \\ X(x) &= z_3 \sin \frac{\omega}{c_D} x + z_4 \cos \frac{\omega}{c_D} x \end{aligned} \tag{43}$$

Lösung für (39) mit (43):

$$\vartheta(x,t) = X(x)T(t) \tag{44}$$

(c)

$$\vartheta(x=0,t) = 0 \tag{RB 1}$$

ist eine geometrische Randbedingung

Freischneiden der Einzelmasse am rechten Ende:

$$M(x=l,t) = -J_E \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}\Big|_{x=l,t} \tag{45}$$

mit $J_E = \frac{1}{2} m r^2$ und dem Materialgesetz (37) ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}\Big|_{x=l,t} + \frac{2GI_p}{mr^2} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Big|_{x=l,t} = 0 \tag{RB 2}$$

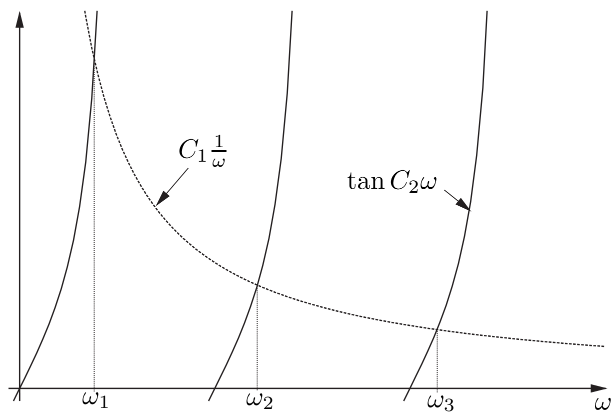
(d) In Gleichung (43) kann $z_2 = 0$ gesetzt werden. Aus (RB 1) folgt $z_4 = 0$. Mit $z_5 = z_1 \, z_3$ ergibt sich aus (44)

$$\vartheta(x,t) = z_5 \sin \omega t \sin \frac{\omega}{c_D} x \tag{46}$$

einsetzen in (RB 2) ergibt die Frequenzgleichung

$$\tan \frac{l}{c_D} \omega = \frac{2GI_p}{mr^2 c_D} \cdot \frac{1}{\omega} \tag{47}$$

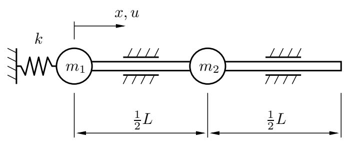
Sie hat unendlich viele Lösungen für ω.



Aufgabe 41

Ein schwingungsfähiges System wird durch das skizzierte Modell aus zwei Dehnstäben (Dehnsteifigkeit EA, Massenbelag ρA) mit Massenpunkten (Masse m_1, m_2) und einer idealen Feder (Steifigkeit k) beschrieben.

Geg.: L, k, m_1, m_2, E, ρ, A



(a) Geben Sie die Bewegungsgleichung(en) des skizzierten Systems und die dazugehörigen Rand- und Übergangsbedingungen an.

Im folgenden wird ein Spezialfall betrachtet, der auf folgende Bewegungsdifferentialgleichung und Randbedingungen führt:

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u''(x,t) \ , \quad u(x=0,t) = 0 \ , \quad u'(x=L,t) = 0$$

(b) Was für ein Spezialfall ist das? Welchen Werten müssen die Massen der zwei Massenpunkte für diesen Spezialfall zustreben? (Der Wert für k soll hierbei nicht eingegrenzt werden.) Geben Sie c in gegebenen Größen an!

(c) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen für den Spezialfall.

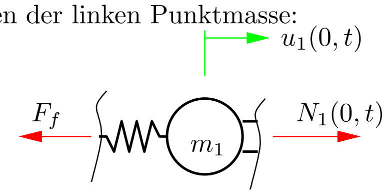
(d) Das System (Spezialfall) soll am rechten Ende ($x = L$) mit einer Kraft angeregt werden. Die Amplitude der Kraft beträgt $\hat{F}$, die Schwingungsperiode T. Berechnen Sie die Schwingungen $u(x,t)$ im eingeschwungenen Zustand!

(a) Für die Verschiebung $u_1(x)$ im Bereich $0 < x < \frac{L}{2}$ und die Verschiebung $u_2(x)$ im Bereich $\frac{L}{2} < x < L$ gelten die folgenden Differentialgleichungen:

$$\ddot{u}_1 = c^2 u_1'' \ , \quad \ddot{u}_2 = c^2 u_2'' \tag{48}$$

$$\text{mit} \quad c^2 := \frac{E}{\rho} \tag{49}$$

Am linken Rand ergibt sich die Randbedingung durch Freischneiden der linken Punktmasse:



Das zweite NEWTONsche Gesetz liefert:

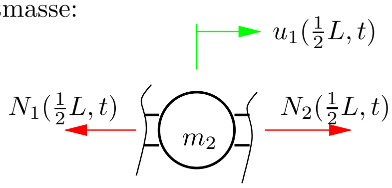
$$m_1\ddot{u}_1(0,t) = -F_f + N_1(0,t) = -ku_1(0,t) + EAu_1'(0,t) \tag{50}$$

In der Mitte ergeben sich zwei Übergangsbedingungen: (Wir verwenden eine durchgehende x-Koordinate für beide Bereiche.)

Erstens muß die Verschiebung auf beiden Seiten der Punktmasse gleich sein:

$$u_1\big(\frac{1}{2}L,t\big) = u_2\big(\frac{1}{2}L,t\big) \tag{51}$$

Zweitens gilt das zweite NEWTONsche Gesetz für die mittlere Punktmasse:



$$m_2\ddot{u}_1\big(\frac{1}{2}L,t\big) = N_2\big(\frac{1}{2}L,t\big) - N_1\big(\frac{1}{2}L,t\big) \tag{52}$$

$$= EA\left(u_2'\big(\frac{1}{2}L,t\big) - u_1'\big(\frac{1}{2}L,t\big)\right) \tag{53}$$

Am rechten (freien) Ende muß die Normalkraft verschwinden:

$$0 = N_2(L,t) = EAu_2'(L,t) \tag{54}$$

(b) Das angegebene Randwertproblem beschreibt den Spezialfall

$$m_1 \to \infty \,\text{oder}\, k \to \infty \tag{55}$$
$$m_2 \to 0$$

c hat wie oben den Wert $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

(c) allg. Lösung für die Ortsfunktion X im Separationsansatz $u(x,t) = X(x)\cos\omega t$:

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x\ ,\ \lambda = \frac{\omega}{c} \tag{56}$$

Erste Randbed. transformiert für die Ortsfunktion und ausgewertet:

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \tag{57}$$

Zweite Randbedingung ebenso:

$$X'(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad B\lambda\cos\lambda L = 0 \tag{58}$$

ergibt (außer der Lösung $\lambda = \omega = 0 \Rightarrow$ keine Schwingung):

$$\lambda L = \pi(n-\frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \pi(n-\frac{1}{2})\frac{c}{L}\ , \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{59}$$

(d) Ansatz vom Typ der rechten Seite, wegen fehlender Dämpfung ohne Phasenverschiebung:

$$u(x,t) = X(x)\cos\Omega t \quad \text{mit}\ \Omega := \frac{2\pi}{T} \tag{60}$$

Allg. Lösung für die Ortsfunktion X:

$$X(x) = A\cos\frac{\Omega}{c}x + B\sin\frac{\Omega}{c}x \tag{61}$$

und mit der unveränderten Randbedinung am linken Rand wieder:

$$X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \tag{62}$$

$$\hookrightarrow \quad X(x) = B\sin\frac{\Omega}{c}x \tag{63}$$

Neue Randbedingung am rechten Rand:

$$N(L,t) = EAu'(L,t) = \hat{F}\cos\Omega t \tag{64}$$

Die Konstante B wird aus der zweiten Randbedingung (64) bestimmt:

$$\hat{F} = EAX'(L) = EA\,B\frac{\Omega}{c}\cos\frac{\Omega}{c}L \tag{65}$$

$$B = \hat{F}\frac{c}{EA\,\Omega\cos\frac{\Omega}{c}L} \tag{66}$$

$$u(x,t) = \hat{F}\frac{c\sin\frac{\Omega}{c}x}{EA\Omega\cos\frac{\Omega}{c}L}\cos\Omega t \tag{67}$$

$$= \frac{\hat{F}}{A\sqrt{E\rho}}\frac{\sin\frac{\Omega}{c}x}{\Omega\cos\frac{\Omega}{c}L}\cos\Omega t \tag{68}$$