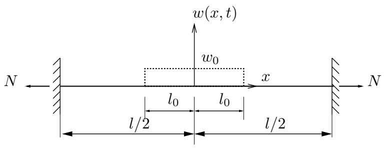
Tutorium

Aufgabe 5

Eine Saite der Länge l wird mit mit der Kraft N vorgespannt und trägt die Masse pro Länge μ. Die Seite wird zur Zeit $t = 0$ wie dargestellt mit $w(x, t = 0) = \begin{cases} w_0 & \text{für } -l_0 \le x \le l_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ausgelenkt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null. Berechnen Sie die Bewegung der Saite $w(x,t)$ mit dem Ansatz nach d'Alembert. Benutzen Sie das gegebene Koordinatensystem.
Geg.: N, μ, l, $c^2 = \frac{N}{\mu}$, $w(x, t = 0)$, $\frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$



Das Problem wird durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1}$$

beschrieben. Zur Lösung soll der Ansatz von d'Alembert

$$w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \tag{2}$$

benutzt werden. Dieser hat die zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned} \dot{w}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} w(x,t) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial (x - ct)} \frac{\partial (x - ct)}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial (x + ct)} \frac{\partial (x + ct)}{\partial t} \\ &= -c f_1'(x - ct) + c f_2'(x + ct). \end{aligned} \tag{3}$$

Dabei sind

$$f_1' := \frac{\partial f_1}{\partial (x - ct)} \text{und} \tag{4}$$

$$f_2' := \frac{\partial f_2}{\partial (x + ct)}. \tag{5}$$

Die Funktionen f_1 und f_2 werden aus den Anfangsbedingungen

$$w(x, t = 0) = \left\{ \begin{array}{cc} w_0, & -l_0 \le x \le l_0 \\ 0, & sonst \end{array} \right\} =: w_A(x), \tag{6}$$

$$\dot{w}(x, t = 0) = 0 \tag{7}$$

bestimmt.

Aus (3) → (7) erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{w}(x,t) &= \left[-c f_1'(x - ct) + c f_2'(x + ct)\right]_{t=0} = 0 \\ &\Rightarrow f_1'(x) - f_2'(x) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

und durch Integration über x:

$$f_1(x) - f_2(x) = 2A. \tag{9}$$

Dabei ist $2A$ eine Integrationskonstante.
Analog ergibt sich aus (2) → (6):

$$\begin{aligned} w(x, t = 0) &= \left[f_1(x - ct) + f_2(x + ct)\right]_{t=0} \\ &= f_1(x) + f_2(x) = w_A(x). \end{aligned} \tag{10}$$

Aus (9) + (10) folgt

$$f_1(x) = \frac{1}{2} w_A(x) + A. \tag{11}$$

und analog aus (10) - (9)

$$f_2(x) = \frac{1}{2} w_A(x) - A. \tag{12}$$

Setzt man nun (11) und (12) in (2) ein, so erhält man

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_A(x - ct) + w_A(x + ct)\right], \; -\frac{l}{2} \le x - ct, x + ct \le \frac{l}{2}. \tag{13}$$

Die Anfangsauslenkung w_A spaltet sich in zwei Wellen mit halber Amplitude auf, die in entgegengesetzte Richtungen die Saite entlang laufen. Diese Lösung ist nur gültig, solange die Wellen die Ränder nicht berühren. Eine allgemeine Lösung erhält man durch Auswertung der Randbedingungen. Die Saite ist an beiden Ende eingespannt, daher gilt:

$$w(x = -\frac{l}{2}, t) = 0 \quad \text{und} \quad w(x = \frac{l}{2}, t) = 0. \tag{14}$$

Diese Randbedingungen werden erfüllt, wenn an den Rändern Wellen gleicher Form aber mit umgekehrten Vorzeichen und entgegengesetzter Laufrichtung reflektiert werden. Das wird erreicht, wenn die Lösung periodisch mit wechselndem Vorzeichen auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Somit lautet die allgemeine Lösung:

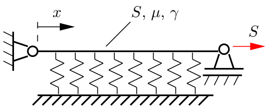
$$\begin{aligned} w(x,t) = &\left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{2} w_0, & -l_0 \le x - ct + (2n)l \le l_0 \\ -\frac{1}{2} w_0, & -l_0 \le x - ct + (2n+1)l \le l_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\} + \\ + &\left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{2} w_0, & -l_0 \le x + ct + 2nl \le l_0 \\ -\frac{1}{2} w_0, & -l_0 \le x + ct + (2n+1)l \le l_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Dabei gilt $n \in \mathbb{Z}$. Die Saite schwingt mit der Schwingungsdauer

$$T = \frac{2l}{c}. \tag{16}$$

Aufgabe 10

Betrachtet wird eine Saite (Länge l, Spannkraft S und Massebelegung μ) mit elastischer Bettung. Hinweis: Die Bettungssteifigkeit γ ist die Steifigkeit der Bettung bezogen auf die Länge. Die Saite ist an beiden Enden fest eingespannt.



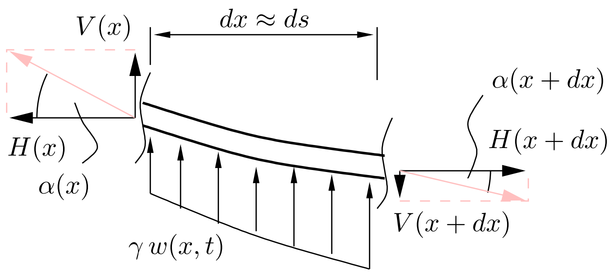
(a) Leite an einem infinitesimalen Stück der Saite die Bewegungsdifferentialgleichung für das untersuchte System her. Die transversale Auslenkung der Saite sei mit $w(x,t)$ bezeichnet.

(b) Wie lauten die Randbedingungen?

(c) Nutze einen geeigneten Separationsansatz für die Auslenkung $w(x,t)$ und überführe die hergeleitete partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen.

(d) Gib die Randbedingungen für die Ortsfunktion an.

(a) Freischnitt am differentiell kleinen Element:



2. Newtonsches Gesetz:

$$dm\,\ddot{u}(x,t) = H(x+dx,t) - H(x,t) \tag{17}$$

$$\ddot{u} = 0, \text{ da reine Transversalschwingung}$$

$$\Rightarrow 0 = H'(x,t)\,dx \Rightarrow H(x,t) = H = \text{konst.} \tag{18}$$

$$dm\,\ddot{w}(x,t) = V(x+dx,t) - V(x,t) - \gamma w(x,t)\,dx \tag{19}$$

$$\text{mit} \quad dm = \mu dx \quad \text{folgt} \tag{20}$$

$$\mu\ddot{w}(x,t) = V'(x,t) - \gamma w(x,t) \tag{21}$$

Kinematik:

$$\frac{V(x,t)}{H} = \tan\alpha(x,t) = w'(x,t) \tag{22}$$

$$\Rightarrow V(x,t) = H\,w'(x,t) \tag{23}$$

$$H = S\cos\alpha(x,t) \approx S \quad (\text{für kleine } \alpha) \tag{24}$$

Aus Gl. (21) mit Gl. (23) und Gl. (24) ergibt sich die folgende partielle Differentialgleichung der Bewegung

$$\ddot{w}(x,t) - \frac{S}{\mu}w''(x,t) + \frac{\gamma}{\mu}w(x,t) = 0 \tag{25}$$

(b) Randbedingungen:

Die Saite ist an beiden Enden fest eingespannt:

$$w(0,t) = 0 \tag{26}$$

$$w(l,t) = 0 \tag{27}$$

(c) Produktansatz nach Bernoulli:

$$w(x,t) = X(x)\,T(t) \tag{28}$$

$$\Rightarrow \ddot{w} = X\,\ddot{T}\,, \quad w'' = X''\,T \tag{29}$$

eingesetzt in die DGL (84):

$$\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{S}{\mu}\frac{X''}{X} - \frac{\gamma}{\mu} \tag{30}$$

Die linke Seite muss zeitlich konstant sein (und räumlich gemäß Ansatz sowieso), da die rechte Seite nicht von der Zeit abhängt. Wir wollen diese Konstante mit $-\omega^2$ bezeichnen:

$$\frac{\ddot{T}}{T} =: -\omega^2 \tag{31}$$

Damit erhalten wir die beiden gewöhnlichen DGL'en.

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \tag{32}$$

$$X'' + \frac{\mu\omega^2 - \gamma}{S}X = 0 \tag{33}$$

(d) Aus den Randbedingungen Gl. (26) und (27) werden mit dem Produktansatz Gl. (28) die folgenden Randbedingungen für die Ortsfunktion:

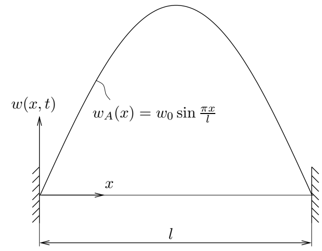
$$X(0) = 0 \tag{34}$$

$$X(l) = 0 \tag{35}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 9

Eine Saite der Länge l wird mit S vorgespannt und trägt die Masse pro Länge μ. Die Seite wird zur Zeit $t = 0$ wie dargestellt mit $w_A(x)$ ausgelenkt. Die Anfangsgeschwindigkeit ist Null. Berechnen Sie die Bewegung der Saite $w(x,t)$ sowohl mit dem Produktansatz von Bernoulli als auch mit dem Ansatz nach d'Alembert. Benutzen Sie das gegebene Koordinatensystem, und gehen Sie wie folgt vor:



I. Ansatz nach d'Alembert:

(a) Wie lautet der Ansatz nach d'Alembert?
(b) Leiten Sie den Ansatz nach der Zeit ab und setzen Sie die Anfangsbedingungen ein. Lösen Sie die beiden Gleichungen für den Zeitpunkt $t = 0$.
(c) Wie lauten die Randbedingungen des Problems? Wie müssen entsprechend die Teilwellen fortgesetzt werden, damit eine Lösung den Randbedingungen genügt?
(d) Geben Sie die Gesamtlösung des Problems, also $w(x,t)$, an.

II. Ansatz nach Bernoulli:

(a) Wie lautet die das Problem beschreibende Differentialgleichung?
(b) Verwenden Sie für die weitere Berechnung den Produktansatz von Bernoulli $w(x) = X(x)\cdot T(t)$ und formen Sie die partielle Differentialgleichung derart um, daß zwei gewöhnliche lineare Differentialgleichungen entstehen.

Für die weitere Berechnung benutzen Sie bitte die Lösungsansätze
$X(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)$ und $T(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)$

(c) Wie lauten die Randbedingungen des Problems?
(d) Setzen Sie den Lösungsansatz in die Randbedingungen ein und berechnen Sie die Frequenzgleichung. Bestimmen Sie die Lösung der Frequenzgleichung und damit die Eigenkreisfrequenzen.
(e) Werten Sie nun auch die Anfangsbedingungen mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen der Eigenfunktionen aus.

Geg.: S, μ, l, $c^2 = \frac{S}{\mu}$, $w(x,t=0) = w_0\sin\frac{\pi x}{l}$, $\frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$

Teil I

Das Problem wird durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{36}$$

beschrieben. Zur Lösung soll der Ansatz von d'Alembert

$$w(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct) \tag{37}$$

benutzt werden. Dieser hat die zeitliche Ableitung

$$\begin{aligned}\dot{w}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}w(x,t)\\ &= \frac{\partial f_1}{\partial(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial(x+ct)}\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}\\ &= -cf_1'(x-ct) + cf_2'(x+ct).\end{aligned} \tag{38}$$

Dabei sind

$$f_1' := \frac{\partial f_1}{\partial(x-ct)}\text{und} \tag{39}$$

$$f_2' := \frac{\partial f_2}{\partial(x+ct)}. \tag{40}$$

Die Funktionen f_1 und f_2 werden aus den Anfangsbedingungen

$$w(x,t=0) = w_0\sin\frac{\pi x}{l} =: w_A(x), \tag{41}$$

$$\dot{w}(x,t=0) = 0 \tag{42}$$

bestimmt.

Aus (38) → (42) erhält man:

$$\dot{w}(x,t) = [-cf_1'(x-ct) + cf_2'(x+ct)]_{t=0} = 0$$
$$\Rightarrow f_1'(x) - f_2'(x) = 0 \tag{43}$$

und durch Integration über x:

$$f_1(x) - f_2(x) = 2A. \tag{44}$$

Dabei ist $2A$ eine Integrationskonstante.
Analog ergibt sich aus (37) → (41):

$$w(x,t=0) = [f_1(x-ct) + f_2(x+ct)]_{t=0}$$
$$= f_1(x) + f_2(x) = w_A(x). \tag{45}$$

Aus (44) + (45) folgt

$$f_1(x) = \frac{1}{2}w_A(x) + A. \tag{46}$$

und analog aus (45) - (44)

$$f_2(x) = \frac{1}{2}w_A(x) - A. \tag{47}$$

Setzt man nun (46) und (47) in (37) ein, so erhält man

$$w(x,t) = \frac{1}{2}[w_A(x-ct) + w_A(x+ct)]$$
$$= \frac{w_0}{2}\left[\sin\frac{\pi}{l}(x-ct) + \sin\frac{\pi}{l}(x+ct)\right],\ 0 \le x-ct, x+ct \le l. \tag{48}$$

Die Anfangsauslenkung w_A spaltet sich in zwei Wellen mit halber Amplitude auf, die in entgegengesetzte Richtungen die Saite entlang laufen. Diese Lösung ist nur gültig, solange die Wellen die Ränder nicht berühren. Eine allgemeine Lösung erhält man durch Auswertung der Randbedingungen. Die Saite ist an beiden Ende fest eingespannt, daher gilt:

$$w(x=0,t) = 0 \quad \text{und} \quad w(x=l,t) = 0. \tag{49}$$

Diese Randbedingungen werden erfüllt, wenn an den Rändern Wellen gleicher Form aber mit umgekehrten Vorzeichen und entgegengesetzter Laufrichtung reflektiert werden. Das wird erreicht, wenn die Lösung periodisch mit wechselndem Vorzeichen auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Diese Bedingung wird bereits durch Fortsetzung der Sinus-Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ erfüllt. Somit lautet die allgemeine Lösung:

$$w(x,t) = \frac{w_0}{2}\left[\sin\frac{\pi}{l}(x-ct) + \sin\frac{\pi}{l}(x+ct)\right]. \tag{50}$$

Die Saite schwingt mit der Schwingungsdauer

$$T = \frac{2l}{c}. \tag{51}$$

<u>Teil II</u>
Wie üblich werden die Abkürzungen

$$\mathrm{c}_{\boxtimes} := \cos\boxtimes \tag{52}$$
$$\mathrm{s}_{\boxtimes} := \sin\boxtimes \tag{53}$$

mit dem Platzhalter ⊠ benutzt.

(a)

$$w(x,t) = (A\mathrm{c}_{\omega t} + B\mathrm{s}_{\omega t})(C\mathrm{c}_{\frac{\omega}{c}x} + D\mathrm{s}_{\frac{\omega}{c}x}) \tag{54}$$

Die Randbedingungen lauten 1. $w(x=0,t) = 0$ und 2. $w(x=l,t) = 0$. Sie müssen für alle Zeiten gelten, d.h.

$$0 = (C\mathrm{c}_{\frac{\omega}{c}0} + D\mathrm{s}_{\frac{\omega}{c}0}) \tag{55}$$
$$0 = C + 0 \tag{56}$$
$$0 = C \tag{57}$$

Die erste Randbedingung liefert also $C = 0$. Mit diesem Ergebnis und der zweiten Randbedingung gilt:

$$0 = D\mathrm{s}_{\frac{\omega}{c}l} \tag{58}$$
$$0 = \mathrm{s}_{\frac{\omega}{c}l} \tag{59}$$

Damit ergeben sich die k Eigenfrequenzen aus:

$$\left\{\frac{\omega}{c}l\right\}_k = k\pi \quad \text{für } k = 1,2,...,\infty \tag{60}$$
$$\omega_k = k\frac{c}{l}\pi \tag{61}$$

(b) Die Lösung lautet also mit den Eigenfrequenzen von oben:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\mathrm{c}_{\omega_k t} + B_k\mathrm{s}_{\omega_k t})\mathrm{s}_{\frac{\omega_k}{c}x} \tag{62}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\mathrm{c}_{\omega_k t} + B_k\mathrm{s}_{\omega_k t})\mathrm{s}_{k\pi\frac{x}{l}} \tag{63}$$

Diese Lösung wird nun an die Anfangsbedingungen 1. $w(x,t=0) = w_A$ und 2. $\frac{\partial w}{\partial t}|_{(x,t=0)} = 0$ angepasst. Die erste Anfangsbedingung liefert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\mathrm{s}_{k\pi\frac{x}{l}} = w_0\mathrm{s}_{1\pi\frac{x}{l}} \tag{64}$$
$$\xrightarrow{\text{Orthogonalität}} A_1 = w_0 \quad \text{und } A_k = 0 \quad \forall k\backslash\{1\} \tag{65}$$

Dieses Ergebnis und die zweite Anfangsbedingung zusammen liefert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k\omega_k\mathrm{s}_{k\pi\frac{x}{l}} = 0 \tag{66}$$
$$\longrightarrow B_k = 0 \quad \forall k \tag{67}$$

Damit ist die spezielle Lösung bekannt. Sie heißt:

$$w(x,t) = w_0\mathrm{c}_{\omega_1 t}\mathrm{s}_{\frac{\omega_1}{c}x} \tag{68}$$
$$= w_0\mathrm{c}_{\pi\frac{ct}{l}}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}} \tag{69}$$

(c)

$$w(x,t=0) = f_1(\xi_1(x-0t) + f_2(\xi_2 = x+0t) \tag{70}$$
$$w(x,t=0) = w_0\left\{\frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}} + \frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}}\right\} \tag{71}$$
$$w(x,t) = w_0\left\{\frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x-ct}{l}} + \frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x+ct}{l}}\right\} \tag{72}$$

(d)

$$w(x,t) = w_0\left\{\frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}-\pi\frac{ct}{l}} + \frac{1}{2}\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}+\pi\frac{ct}{l}}\right\} \tag{73}$$

$$= \frac{1}{2}w_0\left\{\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{c}_{\pi\frac{ct}{l}} - \mathrm{c}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{s}_{\pi\frac{ct}{l}} + \ldots\right.$$

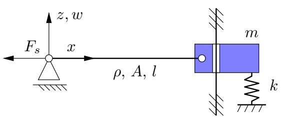
$$\left.\ldots + \mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{c}_{\pi\frac{ct}{l}} + \mathrm{c}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{s}_{\pi\frac{ct}{l}}\right\} \tag{74}$$

$$= w_0\mathrm{s}_{\pi\frac{x}{l}}\mathrm{c}_{\pi\frac{ct}{l}} \tag{75}$$

$$= X(x)\cdot T(t) \tag{76}$$

Aufgabe 11

Eine Saite (Dichte ρ, Querschnittsfläche A, Länge l) ist links ($x=0$) über ein Loslager gelagert und rechts ($x=l$) an einem vertikal geführten Körper (Masse m) befestigt. Der starre Körper wird durch eine Feder wie skizziert gestützt. Die Feder ist in der gezeichneten Lage entspannt. Die äußere Kraft F_s ist zeitlich konstant (und wirke immer genau waagerecht).



(a) Leite die Wellengleichung einer Saite an einem infinitesimalen Stück Saite her.

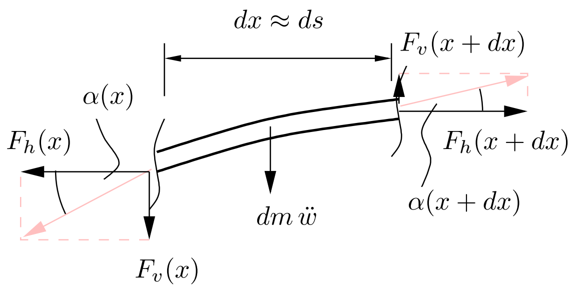
(b) Bestimme die Eigenwertgleichung.

(c) Zeige, dass sich für den Fall $k = \frac{-4\rho Al+\pi m}{16\rho Al^2}\pi F_s$ die erste Eigenfrequenz $\omega_1 = \frac{\pi c}{4l}$ ergibt.

Geg.: l, m, k, F_s, ρ, A

(a) Wellengleichung

Freischnitt am differentiell kleinen Element: Freischnitt am differentiell kleinen Element:



Dynamisches Kräftegleichgewicht:

$$dm\,\ddot{u}(x,t) = F_h(x+dx,t) - F_h(x,t) \tag{77}$$

$$\ddot{u} = 0, \text{ da reine Transversalschwingung}$$

$$\Rightarrow 0 = F_h'(x,t)\,dx \Rightarrow F_h(x,t) = F_h = \text{konst.} \tag{78}$$

$$dm\,\ddot{w}(x,t) = F_v(x+dx,t) - F_v(x,t) \tag{79}$$

$$\rho A\,dx\,\ddot{w}(x,t) = F_v'(x,t)\,dx \tag{80}$$

Kinematik:

$$\frac{F_v(x,t)}{F_h} = \tan\alpha(x,t) = w'(x,t) \tag{81}$$

$$\Rightarrow F_v(x,t) = F_h\,w'(x,t) \tag{82}$$

$$F_h = F_s\cos\alpha(x,t) \approx F_s \quad (\text{für kleine } \alpha) \tag{83}$$

Aus Gl. (80) mit Gl. (82) und Gl. (83) ergibt sich die folgende partielle Differentialgleichung der Bewegung

$$\ddot{w}(x,t) - \frac{F_s}{\rho A}w''(x,t) = 0 \tag{84}$$

(b) Eigenwertgleichung

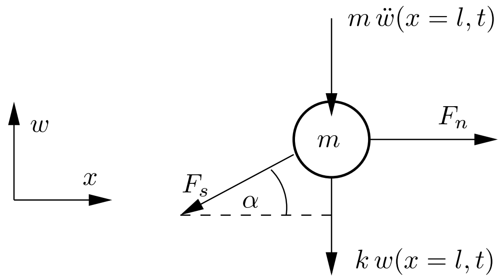
Ausgangspunkt der Betrachtungen ist eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \qquad \text{mit } c^2 = \frac{F_s}{\rho A} \tag{85}$$

Die geometrische Randbedingung am linken Rand wird durch

$$w(x=0,t) = 0 \tag{86}$$

beschrieben. Die dynamische Randbedingung am rechten Rand erhält man durch Betrachtung der freigeschnittenen Punktmasse.



Bei einer reinen Vertikalbewegung der Punktmasse gilt

$$F\cos\alpha = F_s \quad , \tag{87}$$

$$m\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = -kw(x=l,t) - F\sin\alpha. \tag{88}$$

Die Gleichungen (87) und (88) führen zu

$$m\left.\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right|_{(x=l,t)} = -kw(x=l,t) - F_s\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(x=l,t)}. \tag{89}$$

Die Eigenwertgleichung erhält man durch Anpassen dieser Randbedingungen an die Lösung

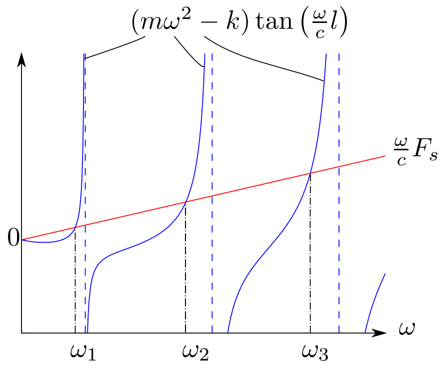
$$w(x,t) = \left[A\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)\right]\cos(\omega t+\varphi). \tag{90}$$

Einsetzen von (90) in (86) ergibt sofort $B=0$. Einsetzen von (90) in (89) führt nach Umformen auf die Eigenwertgleichung

$$(m\omega^2 - k)\tan\left(\frac{\omega}{c}l\right) = \frac{\omega}{c}F_s. \tag{91}$$

Die Eigenwertgleichung (91) hat unendlich viele Lösungen ω_k mit $k\in\mathbb{N}$ Für gegebene Zahlenwerte für m, k, l, ρ, A und F_s kann man diese numerisch oder graphisch bestimmen.

Exemplarisch ist eine graphische Lösung der Eigenwertgleichung im folgenden Bild gezeigt.



(c) Erste Eigenfrequenz
Einsetzen von $k = \frac{-4\rho Al + \pi m}{16\rho Al^2}\pi F_s$ und $\omega_1 = \frac{\pi c}{4l}$ in die Eigenwertgleichung zeigt, dass (91) tatsächlich erfüllt ist. Die erste Eigenform ist dann $X_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4l}x\right)$.