TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2017/18 – UE 14

Thema: Kontaktmechanik von Elastomeren

Aufgabe 1: Messung des Komplexen Moduls

Eine einfache Methode zur Bestimmung des Speicher- und Verlustmoduls von Elastomeren bietet das Torsionspendel (Abb. 1). Hierbei wird eine zylindrische Probe mit dem Radius R und der Länge l aus einem Elastomer an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende mit einem Rotationsträgheitsmoment θ verbunden. Das Pendel wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aus dem Gleichgewicht ausgelenkt und losgelassen. Aus den gemessenen Werten für Schwingungsfrequenz und Dämpfung sind der Speicher- und Verlustmodul zu bestimmen.

Hinweis: Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für den Verdrehwinkel φ im Frequenzraum und machen Sie anschließend einen Koeffizientenvergleich für den Real- und Imaginärteil dieser Gleichung.

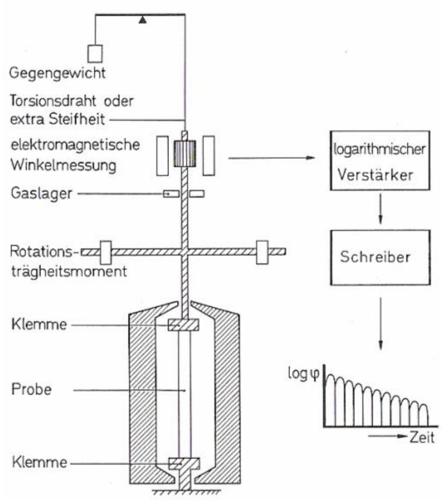
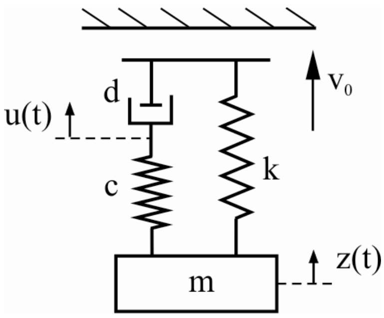


Abb. 1: Aufbau eines Torsionspendels zur Messung des komplexen G-Moduls

Aufgabe 2: Stoß mit einem Standardkörper

Ein viskoelastischer Körper (Masse m) stößt mit einer starren Wand zusammen.



a) Benutzen Sie für den Körper das gezeigte Ersatzmodell und stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung auf.

b) Führen Sie die folgenden dimensionslosen Koordinaten ein:

$\tau = \sqrt{\frac{k}{m}}\, t,\ \zeta = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{k}{m}}\, z,\ \nu = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{k}{m}}\, u$ und zeigen Sie, dass die Aufgabe dann durch das folgende Anfangswertproblem beschrieben wird:

$$\begin{gathered} \ddot{\zeta} + \alpha\dot{\nu} + \zeta = 0, \qquad \alpha = \frac{d}{\sqrt{km}}, \\ \alpha\dot{\nu} - \beta\left(\zeta - \nu\right) = 0, \qquad \beta = \frac{c}{k}, \quad \zeta\left(0\right) = \nu\left(0\right) = 0,\ \dot{\zeta}\left(0\right) = 1 \end{gathered} \tag{1}$$

c) Untersuchen Sie die Fälle sehr großer ($\alpha = 0$) und sehr kleiner Massen ($\alpha \to \infty$). Warum ist der Stoß in diesen beiden Grenzfällen elastisch?

Lösung Aufgabe 1:

Die Bewegungsgleichung für das Pendel ist im Zeitbereich durch

$$\Theta\ddot{\varphi} = -M = -\frac{I_p}{l}\int_{-\infty}^{t} G(t-t')\dot{\varphi}(t')\,\mathrm{d}t' \tag{2}$$

gegeben. Bei einer harmonischen Schwingung mit der (komplexen) Frequenz $\hat{\omega}$ kann diese Gleichung einfacher im Frequenzraum betrachtet werden. Dann ist

$$-\Theta\hat{\omega}^2\hat{\varphi} = -\frac{I_p}{l}\hat{G}(\omega)\hat{\varphi} = -\frac{I_p}{l}(G' + iG'')\hat{\varphi}. \tag{3}$$

Die komplexe Eigenfrequenz kann aus den Messwerten abgelesen werden:

$$\hat{\omega} = \omega + i\delta, \tag{4}$$

Mit der Eigenfrequenz ω und der Abklingkonstante δ der Schwingung. Man erhält:

$$\omega^2 - \delta^2 + i2\delta\omega = \frac{I_p}{\Theta l}(G' + iG''), \tag{5}$$

woraus sich die Werte des Speicher- und Verlustmoduls ablesen lassen:

$$G' = \frac{\Theta l}{I_p}(\omega^2 - \delta^2),\; G'' = \frac{2\delta\omega\Theta l}{I_p}. \tag{6}$$

Lösung Aufgabe 2:

a) Die Bewegungsgleichungen sind durch die Gleichgewichtsbedingungen der beiden Freiheitsgrade einfach bestimmbar. Man erhält:

$$\begin{aligned} m\ddot{z} + d\dot{u} + k_1 z &= 0 \\ d\dot{u} - k_2(z-u) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

b) Die Entdimensionierung führt durch Einsetzen auf das gewünschte Ergebnis, wobei beachtet werden muss, dass für die Ableitungen die Beziehungen

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_0\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\tau},\; \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = v_0\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\tau},\; \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = v_0\sqrt{\frac{k_1}{m}}\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}\tau^2} \tag{8}$$

gelten.

c) Im Fall $\alpha = 0$ ergibt sich als Lösung der Bewegungsgleichung elementar

$$\zeta(t) = \sin\tau \tag{9}$$

Der Stoß ist elastisch (mit Steifigkeit *k*), weil die Bewegung so langsam ist, dass der Dämpfer keine Energie dissipiert (und überhaupt keine Kraft aufbringt, also ein freies Ende darstellt).

Für den Fall $\alpha \to \infty$ muss $\nu = 0$ sein, um die Endlichkeit der entsprechenden Ausdrücke in den Gleichungen zu gewährleisten. Man erhält die modifizierte Bewegungsgleichung für ζ

$$\ddot{\zeta} + (1+\beta)\zeta = 0, \tag{10}$$

mit der Lösung

$$\zeta(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta}}\sin\left(\sqrt{1+\beta}\,\tau\right). \tag{11}$$

Der Stoß ist elastisch (mit Steifigkeit *k* + *c*), weil die Bewegung so schnell ist, dass der Dämpfer als starre Verbindung wirkt und entsprechend ebenfalls keine Energie dissipiert.