TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

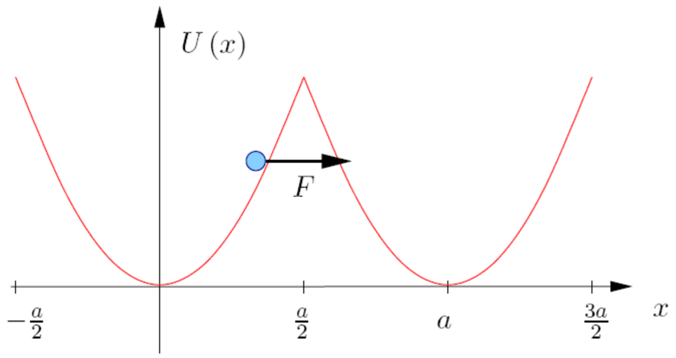
Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2017/18 – UE 10

Thema: Prandtl-Tomlinson-Modell

Aufgabe 1: P-T-Modell mit parabolisch-periodischem Potential

Untersuchen Sie ein etwas abgeändertes Prandtl-Tomlinson-Modell. Ein Massenpunkt (Masse m) bewegt sich unter einer angelegten Kraft F in einem periodischen Potential, das allerdings nicht sinusförmig ist, sondern sich aus einzelnen Parabelstücken zusammensetzt:



$$U(x) = \frac{1}{2}cx^2 \text{ für } -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$$

mit

$$U(x+a) = U(x)$$

Die lineare Dämpfungskraft, die aus phononischer bzw. elektronischer Reibung resultiert, habe die Dämpfungskonstante η.

(a) Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung auf und überführen Sie diese mittels der Substitutionen $x = \xi a$ und $t = \tau\sqrt{m/c}$ in die dimensionslose Form

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + 2D\frac{d\xi}{d\tau} + \xi = \tilde{F}. \quad (1)$$

Identifizieren Sie D und $\tilde{F}$.

(b) Bestimmen Sie die statische Reibungskraft.

(c) Berechnen Sie nun unter der Annahme schwacher Dämpfung die kinetische Reibungskraft als Funktion der (dimensionslosen) Dämpfung D und stellen Sie diese grafisch dar.

Hinweis: Lösen Sie die Differentialgleichung unter der Annahme, dass sich der Massenpunkt gerade noch von Potentialspitze zu Potentialspitze in einer Zeit T bewegen kann. Dies ist der Fall minimaler makroskopischer Geschwindigkeit. Dieser Grenzfall ist gegeben durch

$$x(t=0) = -\frac{a}{2}, \quad \dot{x}(t=0) = 0, \quad x(t=T) = \frac{a}{2}, \quad \dot{x}(t=T) = 0. \quad (2)$$

Lösung Aufgabe 1:

a) Die Bewegungsgleichung lautet elementarerweise

$$m\ddot{x} = F - \eta\dot{x} - cx. \tag{3}$$

Mit den angegebenen Substitutionen erhält man außerdem die Beziehungen

$$\ddot{x} = a\frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}\tau^2}, \quad \dot{x} = a\sqrt{\frac{c}{m}}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau}. \tag{4}$$

Daraus ergibt sich die angegebene dimensionslose Form

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}\tau^2} + 2D\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau} + \xi = \tilde{F}, \quad 2D = \frac{\eta}{\sqrt{cm}}, \quad \tilde{F} = \frac{F}{ca}. \tag{5}$$

b) Die statische Reibungskraft ist durch das Maximum der Kraft aus dem periodischen Potential gegeben, d.h. $F_s = ca/2$.

c) Die allgemeine Lösung der linearen, inhomogenen DGL (1) ergibt sich aus der Superposition der allgemeinen homogenen Lösung mit einer partikulären Lösung,

$$\xi(\tau) = \exp(-D\tau)\left[A\cos(\omega\tau) + B\sin(\omega\tau)\right] + \tilde{F}, \quad \omega = \sqrt{1-D^2}, \quad |D| < 1. \tag{6}$$

Mit den Anfangsbedingungen ergeben sich die unbekannten Kontanten A und B:

$$\begin{aligned} \xi(\tau = 0) &= A + \tilde{F} = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{2} - \tilde{F}, \\ \dot{\xi}(\tau = 0) &= -DA + B\omega = 0 \quad \rightarrow \quad B = -\frac{D}{\omega}\left(\frac{1}{2} + \tilde{F}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

(der Punkt charakterisiert hier die Ableitung nach τ). Man erhält somit als Lösung der DGL

$$\begin{aligned} \xi(\tau) &= -\exp(-D\tau)\left(\frac{1}{2} + \tilde{F}\right)\left[\cos(\omega\tau) + \frac{D}{\omega}\sin(\omega\tau)\right] + \tilde{F}, \\ \dot{\xi}(\tau) &= \exp(-D\tau)\left(\frac{1}{2} + \tilde{F}\right)\left(\frac{D^2}{\omega} + \omega\right)\sin(\omega\tau) = \frac{\exp(-D\tau)}{\omega}\left(\frac{1}{2} + \tilde{F}\right)\sin(\omega\tau). \end{aligned} \tag{8}$$

Im Grenzfall minimaler makroskopischer Geschwindigkeit ist außerdem

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}(\tau = \tau_e) = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_e = \frac{\pi}{\omega}, \\ &\xi(\tau = \tau_e) = \exp\left(-\frac{\pi D}{\omega}\right)\left(\frac{1}{2} + \tilde{F}\right) + \tilde{F} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tilde{F} = \frac{1}{2}\frac{1 - \exp(-\alpha)}{1 + \exp(-\alpha)}, \quad \alpha = \frac{\pi D}{\omega} = \frac{\pi D}{\sqrt{1-D^2}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Dieser Zusammenhang $\tilde{F} = \tilde{F}(D)$ ist in normierter Form in der nebenstehenden Abbildung skizziert. Wie im klassischen Prandtl-Tomlinson-Modell gibt es für das parabolisch-periodische Potential im Fall schwacher Dämpfung drei verschiedene Bereiche (Ruhe I, Bistabilität II und Bewegung III).