TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2017/18 – UE 08

Thema: Tangentialkontakt

Aufgabe 1: Schiefe Kraft

Eine elastische Kugel wird an eine starre Ebene gedrückt, wobei die Richtung der Anpresskraft immer dieselbe bleibt. Zu bestimmen sind die Bedingungen, unter denen das gesamte Kontaktgebiet immer haftet.

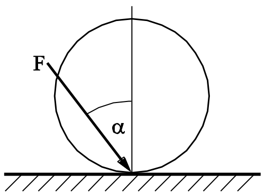


Abb. 1 Elastische Kugel, die durch eine schräge Anpresskraft an eine starre Ebene gedrückt wird.

Aufgabe 2: Sandzylinder

Unten skizziert ist ein mit Sand (Dichte ρ) gefüllter zylindrischer Behälter (Radius R). Im Gegensatz zu einem inkompressiblen Fluid ist der Druck auf den Boden des Behälters nahezu unabhängig von der Füllhöhe. Aufgrund der statischen Reibungskräfte an den Behälterinnenwänden müssen die unteren Schichten nicht das Gewicht der darüber liegenden tragen.
Leiten Sie eine Beziehung für den Druck in Abhängigkeit der Tiefe z her. Schneiden Sie dazu eine dünne (zylindrische) Schicht des (granularen) Mediums frei und werten Sie die Gleichgewichtsbedingungen aus. An den Behälterwänden sollen tangentiale Kräfte nach dem Coulombschen Reibgesetz wirken. Beachten Sie die Randbedingung $p(z = 0) = 0$ $p(z = 0) = 0$.
Wie lautet $p(z)$ für kleine Werte von z? Deuten Sie das Ergebnis.

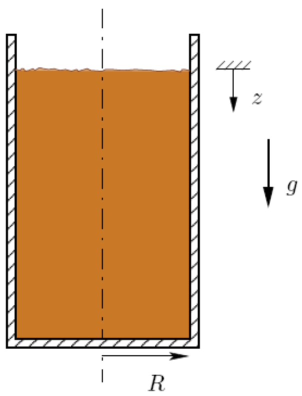


Abb. 2 Mit Sand gefüllter zylindrischer Behälter.

Lösung Aufgabe 1:

In der Vorlesung wurde der Fall einer konstanten Normalkraft (und entsprechend einem festen Kontaktradius a) mit einer ansteigend aufgebrachten Tangentialkraft gelöst (das Cattaneo-Mindlin-Problem). In der vorliegenden Aufgabe wachsen beide Kräfte gleichzeitig, wobei

$$F_x = F_N \tan\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F_N \tan\alpha. \tag{1}$$

Die Indentierung verläuft von einem Kontaktradius $\tilde{a} = 0$ bis zum Kontaktradius $\tilde{a} = a$, wobei

$$\tilde{F}_N = \frac{4}{3} E^* \frac{\tilde{a}^3}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\tilde{F}_N = 4E^* \frac{\tilde{a}^2}{R} \mathrm{d}\tilde{a}. \tag{2}$$

Betrachten wir den Prozess der Indentierung genauer. Wenn man annimmt, dass das gesamte Kontaktgebiet während des ganzen Prozesses haftet, ist der inkrementelle Beitrag zur Schubspannung, wenn das Kontaktgebiet von $\tilde{a}$ zu $\tilde{a} + \mathrm{d}\tilde{a}$ wächst, durch

$$\mathrm{d}\tau(r) = \frac{\mathrm{d}\tilde{F}_x}{2\pi\tilde{a}^2}\left(1 - \frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2} = \frac{\mathrm{d}\tilde{F}_N \tan\alpha}{2\pi\tilde{a}^2}\left(1 - \frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2} = \frac{2E^*}{\pi R}\tan\alpha\left(1 - \frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2} \mathrm{d}\tilde{a}, \;\; r \le \tilde{a}. \tag{3}$$

gegeben. Die gesamte Schubspannung ergibt sich aus dem Integral (es ergeben sich erst Beiträge zur Schubspannung, wenn $\tilde{a} \ge r$, daher die Untergrenze r)

$$\tau(r;a) = \frac{2E^*}{\pi R}\tan\alpha \int_r^a \left(1 - \frac{r^2}{\tilde{a}^2}\right)^{-1/2} \mathrm{d}\tilde{a} = \frac{2E^*}{\pi R}\tan\alpha \sqrt{a^2 - r^2}. \tag{4}$$

Die Druckverteilung ist aus der Hertzschen Lösung bekannt:

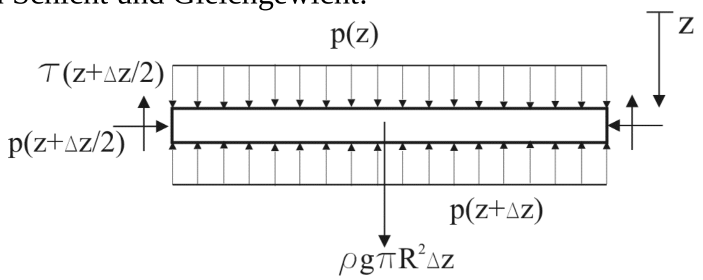
$$p(r;a) = \frac{2E^*}{\pi R}\sqrt{a^2 - r^2}. \tag{5}$$

Das gesamte Kontaktgebiet kann immer haften, falls

$$\tau(r) \le \mu p(r) \quad \Leftrightarrow \quad \tan\alpha < \mu. \tag{6}$$

Lösung Aufgabe 2:

Freischnitt einer dünnen Schicht und Gleichgewicht:



$$\begin{aligned} 0 &= \sum F_z = \left[p(z) - p(z + \mathrm{d}z) \right] \pi R^2 - \mu p(z) 2\pi R \mathrm{d}z + \rho g \pi R^2 \mathrm{d}z \\ &\Leftrightarrow p'(z) + \frac{2\mu}{R} p(z) = \rho g \end{aligned} \tag{7}$$

Lösung dieser Differenzialgleichung mit der gegebenen Randbedingung:

$$p(z) = \frac{\rho g R}{2\mu}\left[1 - \exp\left(-\frac{2\mu}{R} z\right)\right], \text{ für kleine } z: p(z) \approx \rho g z \tag{8}$$

Für kleine Werte von z verhält sich das Medium wie eine ideale Flüssigkeit. Für große Werte von z ist der Druck allerdings beschränkt und ändert sich mit der Tiefe kaum noch.

Alternative Lösung für Aufgabe 1:

Die Aufgabe kann auch auf eine elegantere Weise gelöst werden: Gegeben sei ein momentanes Gleichgewicht des Kontaktes mit den Kräften F_N und F_x sowie dem Kontaktradius a. Nun wird zunächst die Normalkraft um dF_N erhöht, der Kontaktradius wächst nach der Hertzschen Theorie zu

$$a + \mathrm{d}a = a\left(1 + \frac{\mathrm{d}F_N}{F_N}\right)^{1/3}. \tag{9}$$

Unabhängig von der vorherigen Belastungsgeschichte wird so zunächst das ganze Kontaktgebiet haften (das Gleitgebiet bei der Kraft F_N befindet sich ständig an der Grenze $\tau = \mu p$ zum möglichen Haften, eine geringe Erhöhung des Drucks führt also zu vollständigem Haften). Durch das Aufbringen einer zusätzlichen Kraft dF_x kann sich aber wieder Gleiten vom Rand des Kontaktes aus ausbreiten. Der Radius des Haftgebiets c ist aus der Theorie von Cattaneo und Mindlin durch

$$c = (a + \mathrm{d}a)\left(1 - \frac{\mathrm{d}F_x}{\mu(F_N + \mathrm{d}F_N)}\right)^{1/3} = a\left(1 + \frac{\mathrm{d}F_N}{F_N} - \frac{\mathrm{d}F_x}{\mu F_N}\right)^{1/3} \tag{10}$$

gegeben. Falls $c > a$, breitet sich das Kontaktgebiet schneller aus, als sich Gleiten vom Rand des Kontaktes ausbilden kann, und der ganze Kontakt haftet damit. Das führt auf die Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}F_N} = \tan\alpha < \mu. \tag{11}$$

Diese Bedingung ist, wie aus dieser Herleitung ersichtlich wird, sogar unabhängig von eventuell zusätzlich aufgebrachten konstanten Kräften in normaler oder tangentialer Richtung.