TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2017/18 – UE 07

Thema: Coulombsches Reibgesetz

Aufgabe 1: Thermozyklisches Kriechen

In Verbundwerkstoffen kommt es wegen der unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten der Verbundpartner bei wechselnder thermischer Belastung zu dem sehr unerwünschten Effekt des Thermozyklischen Kriechens. Ein sehr einfaches Modell für dieses Phänomen ist in Abb. 1 gezeigt.

Auf eine auf einem Untergrund mit dem Reibungskoeffizienten μ liegende Platte der Länge L wirkt in horizontaler Richtung eine Kraft F, die kleiner ist als die Gleitreibungskraft. Wird die Platte erwärmt, dehnt sie sich aufgrund der angelegten Kraft F relativ zum Untergrund nicht symmetrisch. Wird die Temperatur wieder auf den ursprünglichen Wert gebracht, zieht sie sich (ebenfalls unsymmetrisch) wieder zusammen. Zu bestimmen ist die Verschiebung der Platte nach einem vollen thermischen Zyklus.

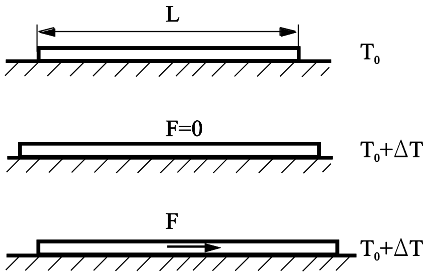

Abb. 1 Thermischer Kriechprozess einer Platte auf einem Untergrund mit Reibungskoeffizienten μ.

Aufgabe 2: Reibungsantrieb

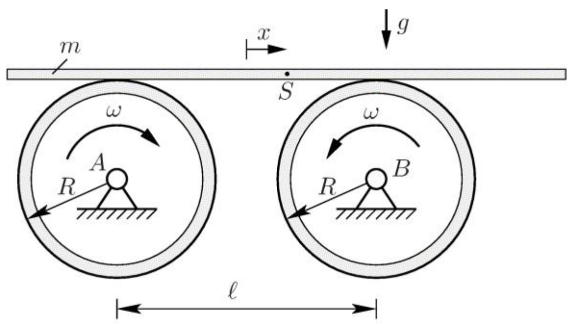

Abb. 2 Entgegengesetzt rotierende Kreisscheiben, auf die exzentrisch ein Stab gelegt wird.

Zwei in ihren Mittelpunkten fest gelenkig gelagerte Kreisscheiben im Abstand ℓ rotieren wie in Abb. 2 skizziert mit der Winkelgeschwindigkeit ω in entgegen gesetzte Richtung. Auf die rotierenden Scheiben wird ein dünner Stab der Masse m gelegt. In den Kontaktpunkten zwischen Stab und Scheiben soll zu jeder Zeit Gleiten vorliegen und das Coulombsche Reibgesetz mit einem von der Winkelgeschwindigkeit unabhängigen Reibungskoeffizienten μ Gültigkeit besitzen. Ermitteln Sie die Bewegungsdifferenzialgleichung des Stabes und geben Sie deren Lösung mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$ an.

Lösung Aufgabe 1:

Wir nehmen an, dass die Platte ausreichend starr ist. Wird die Platte erwärmt, dehnt sie sich relativ zum Untergrund um den Betrag $\varepsilon_{th} = \Delta L / L = \alpha \Delta T$ aus, und zwar symmetrisch in beide Richtungen, sodass ihr Schwerpunkt an der gleichen Stelle bleibt. Wirkt auf die Platte während der Erwärmung eine Kraft F in horizontaler Richtung, so wird sich die Platte asymmetrisch bewegen. Statt des Schwerpunktes wird jetzt der Punkt ruhen, der sich im Abstand Δl *links* davon befindet, denn der Anteil der Reibungskraft, der nach rechts wirkt, muss kleiner sein als der Anteil, der nach links wirkt, damit die Resultierende mit F gerade im Gleichgewicht ist (Abb. 3).

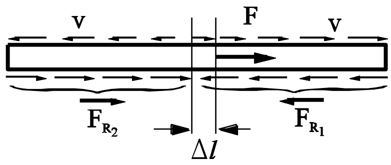

Abb. 3 Dynamik des Kriechprozesses.

Da die Reibungskraft entgegengesetzt zur Richtung der Bewegung ist, muss ein größerer Anteil der Reibungskraft nach links als nach rechts zeigen. Die Gleichgewichtsbedingung während des Erwärmens lautet also:

$$F - \mu mg\left(\frac{L/2 + \Delta l}{L}\right) + \mu mg\left(\frac{L/2 - \Delta l}{L}\right) = 0. \tag{1}$$

Daraus folgt

$$\Delta l = \frac{F}{\mu mg}\frac{L}{2}. \tag{2}$$

Der Schwerpunkt verschiebt sich somit während der Erwärmung um

$$u_S = \varepsilon_{th}\Delta l = \frac{FL}{2\mu mg}\alpha\Delta T. \tag{3}$$

Während der Abkühlung bewegt sich der Schwerpunkt in der *gleichen* Richtung um den *gleichen* Betrag: Der ruhende Punkt muss nun *rechts* vom Schwerpunkt liegen, da Ausdehnungsrichtung und Richtungen der Reibungskräfte sich gerade umkehren. Die gesamte Verschiebung während des ganzen Zyklus ist somit gleich

$$u_{ges} = \frac{FL}{\mu mg}\alpha\Delta T. \tag{4}$$

Die Verschiebung ist proportional zur Kraft – auch bei sehr kleinen Kräften.

Lösung Aufgabe 2:

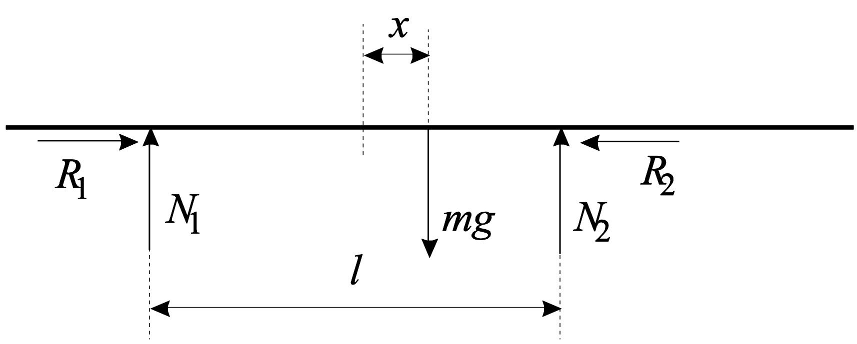

Abb. 4 Freischnitt des Stabes

Das Momentengleichgewicht um den Schwerpunkt und das Kräftegleichgewicht in vertikaler Richtung liefern die Gleichungen

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= mg, \\ N_1\left(\frac{l}{2}+x\right) &= N_2\left(\frac{l}{2}-x\right), \end{aligned} \tag{5}$$

aus denen sich die Normalkräfte bestimmen lassen:

$$N_1 = mg\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}\right),\ \ N_1 = mg\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{l}\right). \tag{6}$$

Da die Kontakte immer Gleiten sollen (dazu muss $|\dot{x}| < \omega R$ sein), sind die Reibkräfte nach dem Coulombschen Gesetz durch

$$R_1 = \mu N_1, \quad R_2 = \mu N_2 \tag{7}$$

gegeben. Das Newtonsche Gesetz in horizontaler Richtung liefert dann die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\ddot{x} = R_1 - R_2 = -\frac{2\mu mg}{l}x, \\ \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{2\mu g}{l}x = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Das ist die Gleichung einer ungedämpften Schwingung mit der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0^2 = \frac{2\mu g}{l}. \tag{9}$$

Mit den gegebenen Anfangsbedingungen lautet damit die Lösung der Bewegungsgleichung

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t). \tag{10}$$