TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2017/18 – UE 06

Thema: Raue Oberflächen

Aufgabe 1: Greenwood-Williamson-Modell mit konischen Asperiten

Untersuchen Sie das Modell von Greenwood und Williamson für raue Oberflächen mit konischen anstatt parabolischen Asperiten (siehe Abb. 1). Der Neigungswinkel aller Asperiten sei gleich. Zeigen Sie zunächst, dass der mittlere Druck in jedem Mikrokontakt gleich ist, und interpretieren Sie Ihr Ergebnis hinsichtlich der Formel

$$\langle p \rangle \approx \frac{1}{2} E^{*} \nabla z. \tag{1}$$

Bestimmen Sie anschließend für eine GAUSSsche Höhenverteilung

$$\phi(z) = \frac{1}{\ell\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\ell^2}\right) \tag{2}$$

die gesamte wirkliche Kontaktfläche und Normalkraft in Abhängigkeit des Abstands h_0 zwischen der undeformierten Lage des elastischen Körpers und dem mittleren Niveau $z = 0$ der rauen Oberfläche. Die Gesamtzahl aller Asperiten sei N.

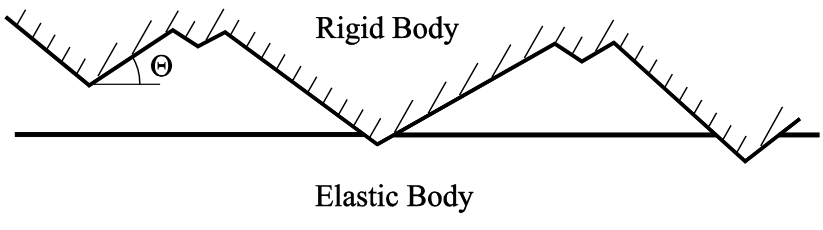

Abb. 1 Kontakt zwischen einer starren rauen Fläche bestehend aus kegelförmigen Spitzen mit dem Steigungswinkel θ und einem elastischen Körper mit dem effektiven E-Modul E^*.

Aufgabe 2: Adhäsion rauer Oberflächen

Das in Abb. 2 gezeigte System besteht aus Federn gleicher Steifigkeit c, die beim Kontakt „kleben“ können. Ihre Adhäsionseigenschaften werden durch die Längenänderung d_c charakterisiert, um die sich eine Feder dehnen kann, bevor sie von der Oberfläche abplatzt. Die Höhenverteilung sei durch

$$\phi(z) = \frac{1}{\ell}\exp\left(-\frac{z}{\ell}\right) \tag{3}$$

gegeben. Die Gesamtzahl der Federn sei N.

Eine starre Ebene wird mit der Kraft F_N an das System gedrückt, sodass sich der Abstand $\tilde{d}$ zwischen den beiden Kontaktpartnern einstellt. Im Anschluss wird die starre Ebene bis auf den Abstand d weggezogen.

a) Bestimmen Sie die Anpresskraft als Funktion des Abstands $\tilde{d}$.

b) Bestimmen Sie die Adhäsionskraft als Funktion der Abstände d und $\tilde{d}$. Es sind die Fälle $d - \tilde{d} \leq d_c$ und $d - \tilde{d} > d_c$ zu unterscheiden.

c) Finden Sie eine Forderung an die Rauigkeit für das Auftreten von makroskopischer Adhäsion. Wie groß ist in diesem Fall die maximale Adhäsionskraft?

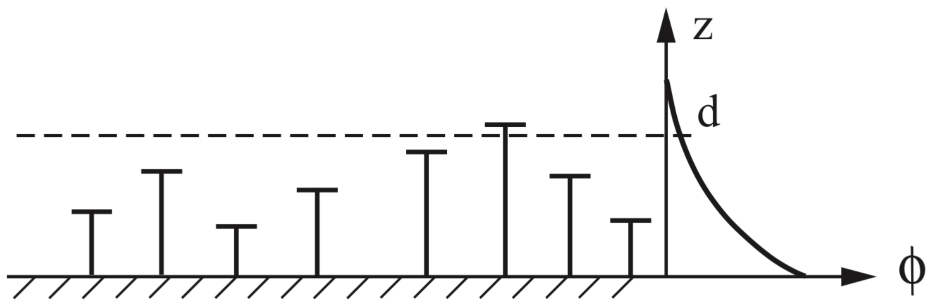

Abb. 2 Federmodell einer stochastischen Oberfläche mit exponentieller Höhenverteilung.

Lösung Aufgabe 1:

Die Lösung für die Fläche und die Normalkraft in einem einzelnen Mikrokontakt mit der Eindrücktiefe $d = z - h_0$ sind (siehe das 4. Hausaufgabenblatt) durch

$$\Delta A = \frac{4}{\pi}\cot^2\theta d^2 \qquad \Delta F = \frac{2}{\pi}\cot\theta E^* d^2 \tag{4}$$

gegeben. Der mittlere Druck in einem Mikrokontakt ist daher (unabhängig von der Eindrücktiefe)

$$\langle p \rangle = \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{1}{2}E^*\tan\theta = \frac{1}{2}E^*\nabla\text{z}. \tag{5}$$

Die gesamte wirkliche Kontaktfläche ergibt sich zu

$$\begin{aligned} A &= N\int_{h_0}^{\infty}\Delta A(z)\phi(z)\mathrm{d}z = \frac{4N\cot^2\theta}{\pi l\sqrt{2\pi}}\int_{h_0}^{\infty}(z-h_0)^2\exp\left(-\frac{z^2}{2l^2}\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{4l^2N\cot^2\theta}{\pi\sqrt{2\pi}}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{h_0^2}{l^2}\right)\left(1-\operatorname{erf}\left(\frac{h_0}{\sqrt{2}l}\right)\right)-\frac{h_0}{l}\exp\left(-\frac{h_0^2}{2l^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Hier bezeichnet erf(x) die sogenannte Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t. \tag{7}$$

Da der mittlere Druck in jedem Mikrokontakt gleich ist, ergibt sich die gesamte Normalkraft aus dem Produkt der wirklichen Kontaktfläche mit diesem mittleren Druck.

Lösung Aufgabe 2:

a) Bei einem Eindruck bis zu einem Abstand $\tilde{d}$ ist die Anpresskraft

$$F_N = N\int_{\tilde{d}}^{\infty}c\left(z-\tilde{d}\right)\phi(z)\mathrm{d}z = \frac{Nc}{l}\int_{\tilde{d}}^{\infty}c\left(z-\tilde{d}\right)\exp\left(-\frac{z}{\ell}\right)\mathrm{d}z = Ncl\exp\left(-\frac{\tilde{d}}{l}\right). \tag{8}$$

b) Wird die starre Ebene nun auf eine Höhe d angehoben, können zwei Fälle auftreten: Ist $d - \tilde{d} \le d_c$, bleiben alle Federn im Kontakt und die resultierende Normalkraft ist

$$F_N = \frac{Nc}{l}\int_{\tilde{d}}^{\infty}c(z-d)\exp\left(-\frac{z}{\ell}\right)\mathrm{d}z = Ncl\exp\left(-\frac{\tilde{d}}{l}\right)\left[1-\frac{d-\tilde{d}}{l}\right], \quad d-\tilde{d}\le d_c. \tag{9}$$

Im anderen Fall $d - \tilde{d} > d_c$ sind am Schluss alle Federn im Kontakt, deren unausgelenkte Lage größer als $d - d_c$ war. Die Normalkraft ist dann

$$F_N = \frac{Nc}{l}\int_{d-d_c}^{\infty}c(z-d)\exp\left(-\frac{z}{\ell}\right)\mathrm{d}z = Ncl\exp\left(-\frac{d-d_c}{l}\right)\left[1-\frac{d_c}{l}\right], \quad d-\tilde{d} > d_c. \tag{10}$$

c) Makroskopische Adhäsion, also negative Normalkräfte, sind nur möglich, falls $d_c > l$. Die maximale Adhäsionskraft ergibt sich dann bei $d = \tilde{d} + d_c$ und beträgt

$$|F_A| = Ncl\exp\left(-\frac{\tilde{d}}{l}\right)\left[\frac{d_c}{l}-1\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{|F_A|}{F_N} = \frac{d_c}{l}-1. \tag{11}$$