



Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2017/18 – UE 04

Thema: Rigorose Behandlung des Normalkontaktproblems ohne Adhäsion

Aufgabe 1: Flachstempelkontakt

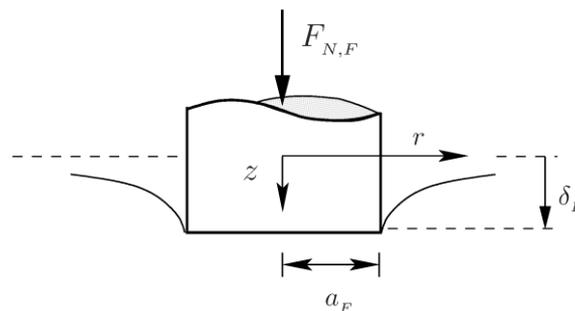


Abb. 1: Eindruck eines flachen, zylindrischen, starren Stempels in den elastischen Halbraum

Abb. 1 zeigt den Eindruck eines flachen, zylindrischen, starren Stempels vom Radius a_F in den elastischen Halbraum. Die Spannungsverteilung ist durch

$$p_F(r, \delta_F) = \begin{cases} E^* \frac{\delta_F}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a_F^2 - r^2}} & \text{für } 0 < r < a_F \\ 0 & \text{für } r > a_F \end{cases} \quad (1)$$

gegeben und die Oberflächennormalverschiebung lautet

$$u_F(r, \delta_F) = \begin{cases} \delta_F & \text{für } 0 < r \leq a_F \\ \frac{2}{\pi} \delta_F \arcsin\left(\frac{a_F}{r}\right) & \text{für } r > a_F \end{cases} \quad (2)$$

- a) Ermitteln Sie den Zusammenhang zwischen $F_{N,F}$, δ_F und a_F .
- b) Geben Sie die Kontaktsteifigkeit

$$k_N := \frac{dF_{N,F}}{d\delta_F} \quad (3)$$

an und begründen Sie, dass diese Kontaktsteifigkeit für alle rotationssymmetrischen Profile gilt.

Aufgabe 2: Parabolischer Kontakt

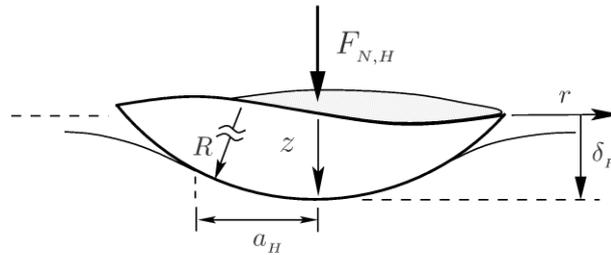


Abb. 2: Normalkontakt zwischen einem starren, parabolischen Profil und einem elastischen Halbraum

Mithilfe des Satzes von Maxwell und Betti soll aufbauend auf den Lösungen (1) und (2) für den Flachstempelkontakt das klassische Hertzsche Kontaktproblem aus Abb. 2 gelöst werden. Gesucht sind die Zusammenhänge zwischen Normalkraft $F_{N,H}$, Eindringtiefe δ_H und Kontaktradius a_H .

Nehmen Sie zunächst gleiche Kontaktflächen an ($a_F = a_H$) und ermitteln Sie mit dem Satz von Betti in der Form

$$\int p_F u_H dA = \int p_H u_F dA \quad (4)$$

die Zusammenhänge zwischen Normalkraft $F_{N,H}$, Eindringtiefe δ_H und Kontaktradius a_H . Nutzen Sie dabei die Tatsache aus, dass für alle axialsymmetrischen Normalkontaktprobleme die universelle Kontaktsteifigkeit gilt.

Lösung Aufgabe 1:

a) Die gesamte Normalkraft ergibt sich durch die Integration

$$F_{N,F} = \int p_F dA = 2E^* \delta_F \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{a_F^2 - r^2}} = 2E^* \delta_F a_F. \quad (5)$$

b) Die Kontaktsteifigkeit ist per Definition

$$k_{N,F} := \frac{dF_{N,F}}{d\delta_F} = 2E^* a_F. \quad (6)$$

Man kann sich klarmachen, dass die inkrementelle Differenz zwischen zwei infinitesimal benachbarten Kontaktkonfigurationen eines rotationssymmetrischen Indenters mit den Eindrücktiefen δ und $\delta + d\delta$, beziehungsweise den Kontaktradien a und $a + da$, als eine Indentierung mit einem flachen zylindrischen Stempel mit dem Radius a um die Tiefe $d\delta$ verstanden werden kann (der Beitrag aus der Änderung des Kontaktradius ist $da \cdot d\delta$ und deswegen von quadratischer Ordnung, die vernachlässigt werden kann). Die Änderung der Normalkraft zwischen diesen beiden Kontaktkonfigurationen ist damit durch die Kraft aus dem Eindrücken des Flachstempels gegeben,

$$dF_N = 2E^* a d\delta. \quad (7)$$

Die inkrementelle Kontaktsteifigkeit ist damit für alle rotationssymmetrischen Indenter

$$k_N := \frac{dF_N}{d\delta} = 2E^* a. \quad (8)$$

Lösung Aufgabe 2:

Der Satz von Maxwell und Betti liefert den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \int p_F u_H dA &= \int p_H u_F dA \\ \Rightarrow 2E^* \delta_F \int_0^{a_H} \left(\delta_H - \frac{r^2}{2R} \right) \frac{r dr}{\sqrt{a_F^2 - r^2}} &= \delta_F F_{N,H}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ausführen der Integration liefert unter der Annahme gleicher Kontaktgebiete die Beziehung

$$F_{N,H} = 2E^* \left(\delta_H a_H - \frac{a_H^3}{3R} \right). \quad (10)$$

Die Universalität der inkrementellen Kontaktsteifigkeit liefert außerdem

$$\begin{aligned} 2E^* a_H = k_N &:= \frac{dF_{N,H}}{d\delta_H} = 2E^* a_H + \left(\delta_H - \frac{a_H^2}{R} \right) \frac{da_H}{d\delta_H} \\ \Rightarrow a_H^2 = \delta_H R &\quad \Rightarrow F_{N,H} = \frac{4}{3} E^* \frac{a_H^3}{R}. \end{aligned} \quad (11)$$

Damit sind die Beziehungen zwischen den globalen Kontaktgrößen für das Hertzsche Kontaktproblem erfolgreich hergeleitet.