

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2017/18 – UE 03

Thema: Kapillare Effekte in Kontakten

Aufgabe 1: Kapillarbrücken

Das untere Bild zeigt sowohl eine harte Kugel (Radius R), die über eine einzelne kapillare Brücke mit einer aus gleichem Material bestehenden ebenen Oberfläche verbunden ist, als auch ein weiteres Modell. Dieses besitzt an seiner Oberfläche eine Vielzahl von zylindrischen Füßen (Radius b).

Diskutieren Sie den Unterschied der beiden skizzierten Modelle hinsichtlich der kapillaren Kraft. Die Flächen seien dabei durch vollständige Benetzbarkeit, d.h. einen Kontaktwinkel $\theta = 0$ ausgezeichnet. Außerdem soll der Radius einer Kapillarbrücke sehr viel kleiner sein als der Krümmungsradius der Kugel ($a \ll R$) und der "Kehlradius" genügend klein gegenüber dem Radius der Füße ($r_0(r) \ll b$).

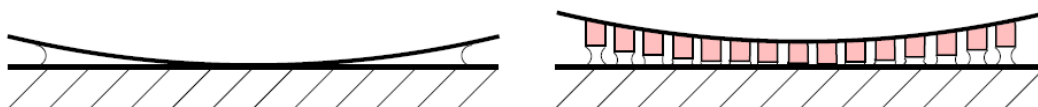


Abb. 1: Kontakt mittels einer (links) und mehrerer (rechts) Kapillarbrücken.

Aufgabe 2: Stift auf einer Wasseroberfläche

Ein zylindrischer Stift (Masse m , Länge L) liegt auf einer Wasseroberfläche (Oberflächenenergie γ_l , Abb. 2). Bestimmen Sie die maximale Gewichtskraft, die die Oberfläche in der Lage ist zu tragen, unter hydrophilen Bedingungen. Wie hängt die maximale Gewichtskraft vom Kontaktwinkel θ ab?



Abb. 2: Stift auf einer Wasseroberfläche.

Lösung Aufgabe 1:

Die Druckdifferenz der einzelnen kapillaren Brücke zur Umgebung beträgt bei vollständiger Benetzung

$$\Delta p = \gamma_l \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_a} \right) \approx -\frac{\gamma_l}{r_a} \approx -\frac{4\gamma_l R}{a^2} \quad (1)$$

Die gesamte kapillare Kraft ist daher

$$F_K = \Delta p \pi a^2 \approx -4\pi R \gamma_l. \quad (2)$$

Diese ist von dem Radius der Kapillarbrücke unabhängig. Es liegt deswegen nahe, dass die Kapillarkraft bei einer Aufteilung auf viele getrennte „Füßchen“ deutlich größer sein kann.

Die Kraft in einer einzelnen dieser vielen „Füßchen“ ist

$$f_k(r) = \pi b^2 \gamma_l \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r_0(r)} \right) \approx -4\pi R \gamma_l \frac{b^2}{r^2}. \quad (3)$$

Die Dichte an einzelnen Brücken kann für genügend große N_0 durch

$$\frac{dN}{dA} \approx \frac{1}{4b^2} \approx \frac{N_0}{4a^2} \quad (4)$$

abgeschätzt werden. Die Gesamtkraft ist damit

$$F_K^N \approx \int f_k \frac{dN}{dA} dA \approx -2\pi^2 R \gamma_l \int_b^a \frac{dr}{r} = -2\pi^2 R \gamma_l \ln \left(\frac{a}{b} \right) \approx -\pi^2 R \gamma_l \ln N_0 \approx F_K \ln N_0. \quad (5)$$

Diese wächst logarithmisch mit der Gesamtanzahl der „Füßchen“.

Lösung Aufgabe 2:

Wir betrachten den Gleichgewichtszustand nach dem Einsinken (blau in der rechten Abbildung). Entlang der Grenzlinie Zylinder-Flüssigkeit-Luft befinden sich die drei Oberflächenenergien tangential zur Zylinderoberfläche immer im Gleichgewicht (durch die Einstellung des Kontaktwinkels, siehe Vorlesung).

Es entsteht also netto eine Kraft senkrecht zur Oberfläche aus der Oberflächenenergie des Wassers mit dem Betrag $\gamma_l L \sin \theta$. Gleichgewicht des Zylinders in vertikaler Richtung liefert dann die Beziehung

$$mg = 2\gamma_l L \sin \theta \cos \alpha. \quad (6)$$

Dabei ist geometrisch leicht zu sehen, dass der Winkel α nicht unter den Wert Null sinken kann (dieser Grenzfall ist in der Abbildung grün dargestellt). Die maximale Gewichtskraft ist damit

$$m_{\max} g = 2\gamma_l L \sin \theta. \quad (7)$$

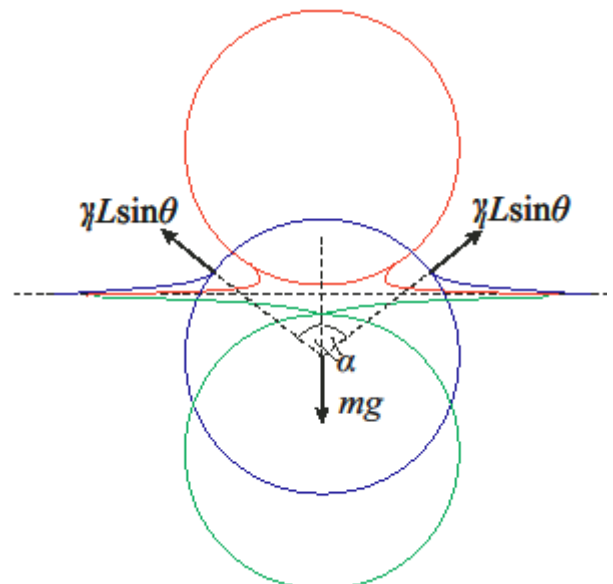


Abb. 3 Einsinken eines Zylinders in eine Wasseroberfläche. Rot: Beginn des Einsinkens, Blau: Gleichgewicht, Grün: Grenzfall des Gleichgewichts.