TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Prof. Dr. Valentin L. Popov
M.Sc. Emanuel Willert

Kontaktmechanik und Reibungsphysik WiSe 2017/18 – UE 01

Thema: Qualitative Abschätzungen zu Normalkontaktproblemen ohne Adhäsion

Aufgabe 1: Modul der einachsigen Kompression

Bei Kontaktproblemen mit dünnen, elastischen Schichten / Aufklebern, werden die Deformationen senkrecht zur Last quasi behindert und wir benötigen als elastischen Parameter den Modul der einachsigen Kompression $\tilde{E}$. Zeigen Sie, dass für diesen gilt:

$$\tilde{E} := \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} E. \tag{1}$$

Aufgabe 2: Normalkontakt eines dünnen sphärischen Aufklebers

Eine zentrale Aufgabe der Kontaktmechanik ist die Berechnung des Zusammenhangs zwischen der Normalkraft F_N und der Eindrücktiefe d. Vor deren genauer Berechnung soll zunächst nur eine qualitative Analyse erfolgen, die zum grundlegenden Verständnis der auftretenden Phänomene beiträgt. Die Oberflächen der Kontaktpartner seien glatt und für die jeweiligen deformierbaren Teile sei linear-elastisches Verhalten angenommen.

Bestimmen Sie näherungsweise die F_N-d-Relation für den Kontakt zwischen einem dünnen sphärischen, elastischen Aufkleber (Kugelkappe vom Radius R und der Dicke $l_0 \ll R$) und einer starren, ebenen Platte mittels des Satzes von Castigliano

$$F_N = \frac{\partial W_{el}}{\partial d}. \tag{2}$$

Dabei soll die Form des Aufklebers durch eine Funktion 2. Grades angenähert werden. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Integration der Druckverteilung im Kontakt.

Aufgabe 3: Qualitative, grobe Abschätzung für den Hertzschen Kontakt

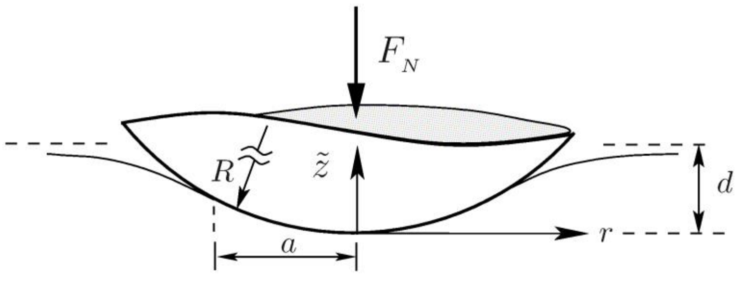

Abb. 1: Normalkontakt zwischen einer starren Kugel und einem elastischen Halbraum

Das Hertzsche Problem beinhaltet unter anderem den Kontakt zwischen einer starren Kugel vom Radius R und einem elastischen Halbraum (siehe Abb. 1). Das exakte Ergebnis dieser Theorie lautet

$$a = \sqrt{Rd} \quad \text{und} \quad F_N = \frac{4}{3} E^* \sqrt{Rd^3} \quad \text{mit} \quad E^* := \frac{E}{1-\nu^2}, \tag{3}$$

wobei anstelle der exakten Kugelform von der quadratischen Näherung ausgegangen wird (parabolischer Kontakt). Das gleiche Ergebnis gilt auch für den Kontakt zwischen einer elastischen Kugel und einer starren Ebene.

a) Leiten Sie näherungsweise die F_N-d-Relation für den Kontakt zwischen einer elastischen Kugel und einer starren Ebene ab, indem Sie als Abschätzung von einer konstanten Dehnung im Kontaktgebiet ausgehen, deren Größe mit Hilfe des maßgeblich deformierten Volumens abgeschätzt werden soll. Vergleichen Sie diese mit der exakten Lösung.

b) Schätzen Sie außerdem mithilfe der exakten Lösung (3) und der Näherung aus Aufgabe a) die Größe des Kontaktgebietes und den mittleren Druck in einem Rad-Schiene-Kontakt ab. Die maximale Last je Rad liege bei $F_N = 10^5\,\mathrm{N}$ und der effektive Radius sei $R \approx 0{,}5\,\mathrm{m}$. Der Elastizitätsmodul soll mit $E \approx 2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Pa}$ abgeschätzt werden, die Poissonzahl sei $\nu = 1/3$.

Lösung Aufgabe 1

Die Aufgabe kann abstrakt mithilfe des Hookeschen Gesetzes gelöst werden. Die Normalspannungskomponente in Richtung der Deformation ist durch

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right), \tag{4}$$

mit den beiden Lamé-Konstanten G und λ , gegeben. Unter Berücksichtigung der Unterdrückung der Querdehnungen,

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0, \tag{5}$$

führt das auf folgenden Ausdruck für den Modul der einachsigen Kompression:

$$\tilde{E} = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = 2G + \lambda. \tag{6}$$

Schreibt man die beiden Lamé-Konstanten mithilfe des E-Moduls und der Poissonzahl aus, ergibt sich

$$\tilde{E} = \frac{E}{1+\nu}\left(1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\right) = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}E. \tag{7}$$

Eine alternative Lösung kann aus dem Gleichungssystem der Zugdeformation

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{xx} &= \sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) \\ E\varepsilon_{yy} &= \sigma_{yy} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}\right) \\ E\varepsilon_{zz} &= \sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

erhalten werden. Auflösung dieses Systems unter Berücksichtigung von (5) liefert

$$\sigma_{xx} = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}E\varepsilon_{xx} \tag{9}$$

und damit offensichtlich den gleichen Modul wie in Gleichung (7).

Lösung Aufgabe 2

Es werden folgende Annahmen für die Abschätzung getroffen:

- $d \ll l_0 \ll a \ll R$
- daher einachsige Kompression

Das Profil des sphärischen Aufklebers kann dann durch

$$f(r) = R - \sqrt{R^2 - r^2} \approx \frac{r^2}{2R} \tag{10}$$

beschrieben werden. In der parabolischen Näherung lautet daher die Deformation wie folgt:

$$\varepsilon_{zz}(r) = \frac{\Delta l(r)}{l_0} = \frac{1}{l_0}\left(\frac{r^2}{2R} - d\right). \tag{11}$$

Der Kontaktradius beträgt

$$a = \sqrt{2Rd}. \tag{12}$$

Damit ergibt sich die gesamte in der Deformation gespeicherte elastische Energie zu

$$W_{el} = \frac{1}{2}\int \sigma_{zz}\varepsilon_{zz}\mathrm{d}V = \frac{\tilde{E}}{2}\int \varepsilon_{zz}^2\mathrm{d}V = \frac{\pi\tilde{E}}{l_0}\int_0^{\sqrt{2Rd}}\left(\frac{r^2}{2R} - d\right)^2 r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi R\tilde{E}}{3l_0}d^3. \tag{13}$$

Anwendung des Satzes von Castigliano liefert dann

$$F_N = \frac{\partial W_{el}}{\partial d} = \frac{\pi R\tilde{E}}{l_0} d^2. \tag{14}$$

Die Normalkraft kann alternativ auch durch direkte Integration der Druckverteilung ermittelt werden:

$$F_N = \int p\,\mathrm{d}A = \frac{2\pi\tilde{E}}{l_0}\int_0^{\sqrt{2Rd}}\left(d - \frac{r^2}{2R}\right) r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi R\tilde{E}}{l_0} d^2. \tag{15}$$

Lösung Aufgabe 3

a) Das wesentlich deformierte Gebiet ist ein Zylinder mit dem Durchmesser und der Höhe $2a \simeq 2\sqrt{2Rd}$. Die (als konstant abgeschätzte) Deformation in diesem Gebiet ist

$$\varepsilon_{zz} \simeq -\frac{d}{2a} \simeq -\sqrt{\frac{d}{8R}}. \tag{16}$$

Damit ergibt sich für den Druck im Kontakt

$$p \simeq \tilde{E}\sqrt{\frac{d}{8R}} \tag{17}$$

und die Normalkraft

$$F_N \simeq \pi a^2 p \simeq \frac{\pi}{\sqrt{2}}\tilde{E}\sqrt{Rd^3}. \tag{18}$$

Das stimmt qualitativ sehr gut mit der exakten Lösung überein.

b) Mit der exakten Lösung des Hertzschen Kontaktproblems und den gegeben Zahlenwerten ergibt sich für die Eindrücktiefe

$$d = \left[\frac{3F_N\left(1-\nu^2\right)}{4E\sqrt{R}}\right]^{2/3} \approx 6{,}1\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}, \tag{19}$$

den Kontaktradius

$$a = \sqrt{Rd} \approx 5{,}5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \tag{20}$$

und den mittleren Druck im Kontakt

$$\bar{p} = \frac{F_N}{\pi a^2} \approx 1050\,\mathrm{MPa}\ \text{ (der Maximaldruck ist um den Faktor 1,5 größer).} \tag{21}$$

Mit der Abschätzung aus Aufgabenteil a) erhält man

$$\begin{aligned} d &= \left[\frac{\sqrt{2}F_N}{\pi\tilde{E}\sqrt{R}}\right]^{2/3} \approx 3{,}6\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}, \\ a &= \sqrt{2Rd} \approx 6{,}0\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}, \\ \bar{p} &= \frac{F_N}{\pi a^2} \approx 890\,\mathrm{MPa}. \end{aligned} \tag{22}$$