Die Dissipationsfunktion. Zwangskräfte.

I. Die Dissipationsfunktion.

Zur Berechnung von generalisierten *dissipativen (Widerstands-)* Kräften benutzt man die Dissipationsfunktion.

Definieren wir eine Funktion *D*, deren Ableitungen nach Geschwindigkeitskomponenten mit negativem Vorzeichen die Reibungskraftkomponenten ergeben:

$$F_x^{(1)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1},\ F_y^{(1)} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1},\dots . \qquad (1)$$

Beispiele:

- **Gleitreibung:** $D = \mu N \left| v_{rel} \right|$,

  μ - Reibkoeffizient, *N*- Normalkraft
- **lineare Dämpfung:** $D = \frac{1}{2} b v_{rel}^2$,

  b-*D*ämpfungskonstante
- **Luftwiderstand:** $D = \frac{1}{3} k \left| v_{rel} \right|^3$.

v_{rel} ist relative Gleitgeschwindigkeit.

Wir wollen nun *verallgemeinerte dissipative Kräfte* berechnen. Bei der Beschreibung eines Systems mit verallgemeinerten Koordinaten sind seine kartesischen Koordinaten Funktionen von verallgemeinerten Koordinaten: $x_i = x_i(q_1, \dots, q_s)$.

Zur Berechnung der verallgemeinerten Kräfte berechnen wir die virtuelle Arbeit bei einer beliebigen Verrückung des Systems:

$$dW = \sum_i F_i dx_i = \sum_i -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} dx_i .$$

eine verallgemeinerte Kraft wird definiert als

$$Q_j = \frac{\partial W}{\partial q_j} = \sum_i -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_i -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}$$

Daraus folgt *für beliebige generalisierte Koordinaten* q_i:

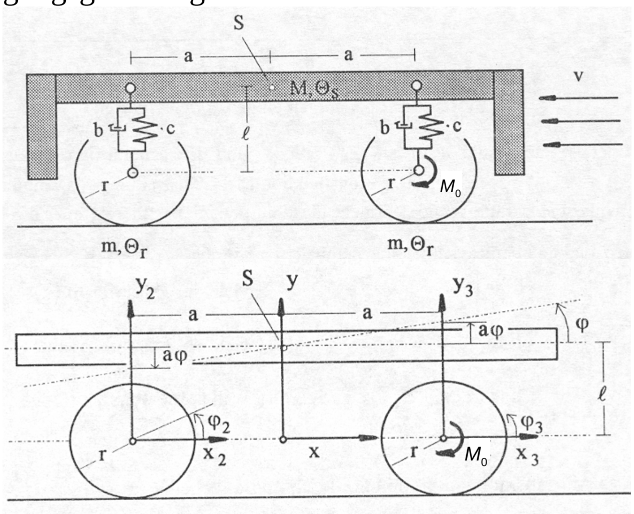
$$\boxed{Q_{q_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}}$$

Mit der Dissipationsfunktion lassen sich die Lagrangegleichungen wie folgt schreiben:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

In dieser Form sind die folgenden Kräfte berücksichtigt: (a) alle konservativen Kräfte stecken bereits in der Lagrangefunktion, (b) dissipative (Widerstands-) Kräfte durch die Dissipationsfunktion, (c) alle sonstigen mit Q_i.

Beispiel. Modell eines Fahrzeuges: Aufbau + zwei Räder über Feder-Dämpferbeine abgestützt. Nickbewegungen des Aufbaus seien klein. Ein Rad wird mit einem Moment M_0 angetrieben. Der Aufbau erfährt einen Widerstand durch den mit konstanter Geschwindigkeit *v* wehenden Wind. Man stelle die Bewegungsgleichungen auf.



Lösung: Die Lagrangefunktion des Systems:

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\Theta_s \dot{\varphi}^2$$
$$+ \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\Theta_r \dot{\varphi}_2^2$$
$$+ \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 + \frac{1}{2}\Theta_r \dot{\varphi}_3^2$$
$$- Mgy - \frac{1}{2}c\left(y_2 - l\right)^2 - \frac{1}{2}c\left(y_3 - l\right)^2 .$$

Die Dissipationsfunktion des Systems ist

$$D = \frac{1}{2}b\dot{y}_2{}^2 + \frac{1}{2}b\dot{y}_3{}^2 + \frac{1}{3}k\left|\dot{x} + v\right|^3 .$$

Das Antriebsmoment muss über die virtuelle Arbeit $\delta W_{Antrieb} = -M_0 \delta\varphi_3$ berücksichtigt werden.

Bindungsgleichungen: Als generalisierte Koordinaten werden x, y, φ gewählt.

$$x_2 = x - a \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \dot{x}$$
$$x_3 = x + a \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_3 = \dot{x}$$
$$y_2 = y - a\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_2 = \dot{y} - a\dot{\varphi}$$
$$y_3 = y + a\varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_3 = \dot{y} + a\dot{\varphi}$$
$$\varphi_2 = -\frac{x_2}{r} = -\frac{x - a}{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}_2 = -\frac{\dot{x}}{r}$$

$$\varphi_3 = -\frac{x_3}{r} = -\frac{x+a}{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}_3 = -\frac{\dot{x}}{r}$$

Für die Lagrangesche Funktion ergibt sich

$$L = \frac{1}{2} M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}\Theta_s \dot{\varphi}^2 + 2\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + 2\frac{1}{2}\frac{\Theta_r}{r^2}\dot{x}^2$$

$$-Mgy - \frac{1}{2}c\left(y - a\varphi - l\right)^2 - \frac{1}{2}c\left(y + a\varphi - l\right)^2$$

oder

$$L = \frac{1}{2} M\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}\Theta_s \dot{\varphi}^2 + \left(m + \frac{\Theta_r}{r^2}\right)\dot{x}^2$$

$$-Mgy - c\left(y - l\right)^2 - ca^2\varphi^2$$

Die Dissipationsfunktion ist

$$D = \frac{1}{2} b\left(\dot{y} - a\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2} b\left(\dot{y} + a\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{3} k\left|\dot{x} + v\right|^3 =$$

$$= b\dot{y}^2 + ba^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}k\left|\dot{x} + v\right|^3.$$

Die virtuelle Arbeit des Antriebsmomentes ist

$$\delta W_{Antrieb} = \frac{M_0}{r}\delta x \quad \Rightarrow \quad Q_x = \frac{M_0}{r}.$$

Die Bewegungsgleichungen:

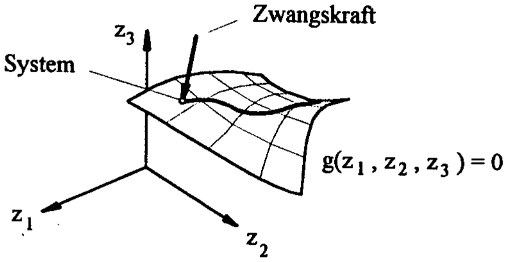
$$\boxed{\begin{aligned} &\left(M + 2m + 2\frac{\Theta_r}{r^2}\right)\ddot{x} + k\left|\dot{x}+v\right|\left(\dot{x}+v\right) = M_0/r \\ &M\ddot{y} + Mg + 2c(y-l) + 2b\dot{y} = 0 \\ &\Theta\ddot{\varphi} + 2ca^2\varphi + 2ba^2\dot{\varphi} = 0 \end{aligned}}$$

II. Zwangskräfte können auch im Lagrange-formalismus berechnet werden.

Zwangskräfte stehen immer senkrecht zu den "erlaubten" Bewegungen. Gibt es in einem System eine Bindung der Form

$$g(q_1, q_2, ..., q_s) = 0, \qquad (1)$$

so kann sich dieses System im q-Raum nur auf der Hyperfläche (1) bewegen:



Die Zwangskräfte sind senkrecht zu dieser Fläche gerichtet. Diese "senkrechte Richtung" kann analytisch berechnet werden: Erleiden alle Koordinaten q_i eine beliebige kleine Änderung, die mit der Bedingung (1) verträglich ist, so ändert sich g nicht, d.h.:

$$dg = \sum_i \frac{\partial g_i}{\partial q_i} dq_i = 0.$$

Diese Gleichung kann als Skalarprodukt von zwei Vektoren: $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial g}{\partial q_s}\right)$ und $\vec{dq} = \left(dq_1, ..., dq_s\right)$ aufgefasst werden. Vektor $\vec{dq}$ liegt dabei immer in der Hyperebene und Vektor $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial g}{\partial q_s}\right)$ folglich senkrecht zu dieser Ebene. Das bedeutet, dass die Zwangskraft die gleiche Richtung hat, wie der Vektor ∇g:

$$\boxed{Q_i^{Zwang.} = \lambda \frac{\partial g}{\partial q_i}}.$$

Die noch unbekannte Größe λ heißt Lagrange-Multiplikator und kann aus der Bedingung (1) berechnet werden.

Lagrangesche Gleichungen 1. Art

für Systeme mit beliebigen eingeprägten Kräften und Zwangskräften

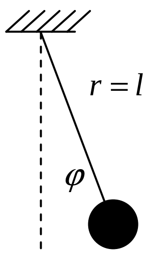
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial q_i}$$

$$g_1(q_1, q_2, ..., q_s) = 0$$

....

$$g_k(q_1, q_2, ..., q_s) = 0$$

Beispiel: Ein Pendel. Man stelle die Bewegungsgleichungen auf und gebe die Stangenkraft an.



<u>*Lösung:*</u> Die Lagrangefunktion *ohne Berücksichtigung der Zwangsbedingung* ist

$$L = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr\cos\varphi$$

.

Die Zwangsbedingung ist $r - l = 0$, somit $g(r, \varphi) = r - l$.

Die Bewegungsgleichungen sind:

1) $m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi = \lambda \frac{\partial g}{\partial r} = \lambda$

2) $mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mgr\sin\varphi = \lambda \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$

3) $r - l = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = 0$.

Die zweite Gleichung ist dann die gesuchte Bewegungsgleichung und die erste gibt die Zwangskraft an:

$$F_r = \lambda \frac{\partial g}{\partial r} = -mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi.$$