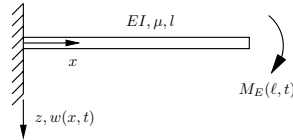


Tutorium

Aufgabe 85

Ein Kragbalken wird wie abgebildet durch ein Moment am rechten Rand belastet.



- (a) Wie lauten die *geometrischen* Randbedingungen für das System?
- (b) Berechnen Sie die kinetische Energie K , die potentielle Energie U sowie die virtuelle Arbeit δA für das Gesamtsystem.
- (c) Formulieren Sie das Prinzip von HAMILTON für das untersuchte System.
- (d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamischen* Randbedingungen her.

Geg.: $EI, \mu := \rho A, l, M_E = M(t)$

(a) Geometrische Randbedingungen:

$$w(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta w(0, t) = 0 \quad (1)$$

$$w'(0, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta w'(0, t) = 0 \quad (2)$$

(b) Kinetische und potenzielle Energie sowie die virtuelle Arbeit des eingepprägten Momentes $M(t) := M_E(l, t)$:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2 dx \quad (3)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 dx \quad (4)$$

$$\delta A = M(t) \delta w'(l, t) \quad (5)$$

(c) Das Prinzip von HAMILTON (auch Prinzip der stationären/kleinsten Wirkung genannt) lautet:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - U) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta A dt = 0 \quad (6)$$

(d) Aus Gleichung (6) folgt:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI w''^2 dx \right\} dt + \int_{t_0}^{t_1} M(t) \delta w'(l, t) dt = 0 \quad (7)$$

Variation unter die Integrale ziehen:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \mu \delta \dot{w}^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l EI \delta w''^2 dx \right\} dt + \int_{t_0}^{t_1} M(t) \delta w'(l, t) dt = 0 \quad (8)$$

Durchführen der Variation:

$$\delta \dot{w}^2 = 2 \dot{w} \delta \dot{w} \quad \text{bzw.} \quad \delta w'^2 = 2 w' \delta w' \quad (9)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l \mu \dot{w} \delta \dot{w} dx - \int_0^l EI w'' \delta w'' dx \right\} dt + \int_{t_0}^{t_1} M(t) \delta w'(l, t) dt = 0 \quad (10)$$

Im Folgenden werden die Integrale der Übersichtlichkeit halber einzeln betrachtet. Dabei werden um δw und $\delta w'$ zu faktorisieren partielle Integrationen durchgeführt.

I

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \mu \dot{w} \delta \dot{w} dx dt = \int_0^l \underbrace{[\mu \dot{w} \delta w]_{t_0}^{t_1}}_{=0, \text{ siehe Voraussetzungen von HAMILTON}} dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \mu \ddot{w} \delta w dx dt \quad (11)$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \mu \ddot{w} \delta w dx dt \quad (12)$$

II

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l EI w'' \delta w'' dx dt = - \int_{t_0}^{t_1} [EI w'' \delta w']_0^l dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l EI w''' \delta w' dx dt \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{beachte geom. RB bei } x=0 & \Rightarrow = - \int_{t_0}^{t_1} EI w''(l, t) \delta w'(l, t) dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} [EI w''' \delta w]_0^l dt \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l EI w^{IV} \delta w dx dt \quad (14) \end{aligned}$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} EI w''(l, t) \delta w'(l, t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{beachte geom. RB bei } x=0 & \Rightarrow + \int_{t_0}^{t_1} EI w'''(l, t) \delta w(l, t) dt \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l EI w^{IV} \delta w dx dt \quad (15) \end{aligned}$$

III

$$\int_{t_0}^{t_1} M(t) \delta w'(l, t) dt \quad \text{wird nicht umgeformt} \quad (16)$$

Alles wieder ins Prinzip von HAMILTON einsetzen und sortieren:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l (-\mu \ddot{w} - EI w^{IV}) \delta w dx dt \quad (17)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \{-EI w''(l, t) + M(t)\} \delta w'(l, t) dt \quad (18)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \{EI w'''(l, t)\} \delta w(l, t) dt = 0 \quad (19)$$

Da die Variationen δw , $\delta w'(l, t)$ und $\delta w(l, t)$ unabhängig sind, müssen die einzelnen Terme davor getrennt voneinander verschwinden. Aus Gleichung (17) folgt die Feldgleichung zu:

$$\ddot{w} + c^2 w^{IV} = 0 \quad \text{mit} \quad c^2 = \frac{EI}{\mu} \quad (20)$$

Aus Gleichung (18) und (19) folgen die dynamischen Randbedingungen, welche auch aus Freischnitten bestimmt werden könnten:

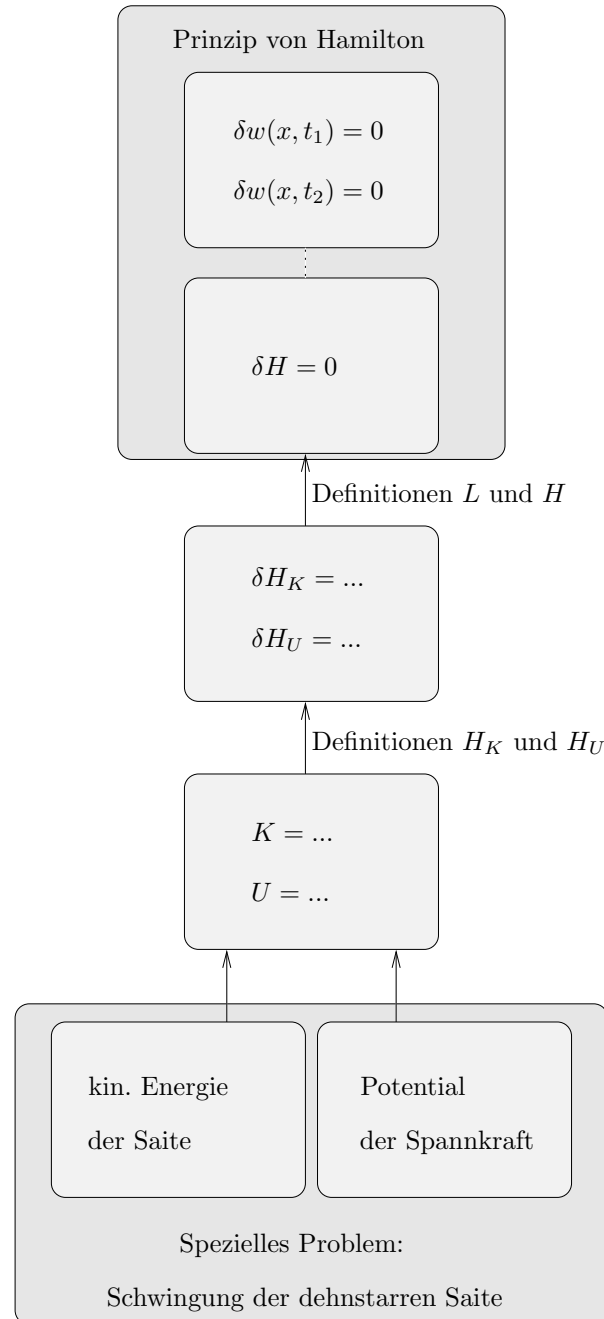
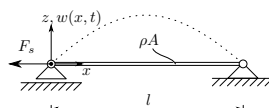
$$w''(l, t) = \frac{M(t)}{EI} \quad (21)$$

$$w'''(l, t) = 0 \quad (22)$$

Aufgabe 86

Eine (dehnstarre) Saite der Länge l wird mit F_s vorgespannt und trägt die Masse pro Länge $\mu := \rho A$. Leiten Sie die Bewegungs-Differentialgleichung mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung (Prinzip von HAMILTON) her.

Geg.: F_s, μ, l



Damit man nicht den Überblick verliert, kommt hier 'mal eine Musterlösung in unüblicher Reihenfolge. Zuerst wird die Lösung der Aufgabe sehr kurz und übersichtlich angegeben. Und danach werden die Schritte erklärt, die in der Kurzlösung unterschlagen wurden.

Das Prinzip von HAMILTON besagt, dass die Variation des Wirkungsfunktionals H bei der gesuchten Lösung w gleich Null ist. D.h. die "Ableitung" von H in "Richtung" der (beliebigen) Funktion δw verschwindet an der "Stelle" w . Oder noch anders: Wenn man die gesuchte Verschiebung w verändert um eine andere Verschiebung δw , ändert sich der Wert des Funktionals H nicht, weil er an der Stelle w extremal ist. Als Formel:

$$\delta H(w, \delta w) = 0 \quad (23)$$

Für die schwingende Saite ergibt sich für die Variation mit

dem, was unten unter **Berechnen der Variation** steht:

$$\delta H(w, \delta w) = \mu \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \dot{w} \delta \dot{w} dx dt - F_s \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l w' \delta w' dx dt \quad (24)$$

$$\delta H = 0 \quad (25)$$

oder mit der Abkürzung $\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l =: \iint_{tx}$ und mit dem, was unten

unter **Berechnung von** $\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \dot{w} \delta \dot{w} dx dt$ **usw.** steht:

$$\delta H = 0 \quad (26)$$

$$0 = \mu \iint_{tx} \dot{w} \delta \dot{w} dx dt - F_s \iint_{tx} w' \delta w' dx dt \quad (27)$$

$$0 = -\mu \iint_{tx} \ddot{w} \delta w dx dt + F_s \iint_{tx} w'' \delta w dx dt \quad (28)$$

$$0 = \iint_{tx} \{ -\mu \ddot{w} + F_s w'' \} \delta w dx dt \quad (29)$$

Da die Anfangs- und die Endzeit t_1 und t_2 beliebig gewählt werden können, und da außerdem die virtuelle Verschiebung δw beliebig ist, ist dies nur möglich genau dann wenn

$$0 = -\mu \ddot{w} + F_s w'' \quad (30)$$

Und dies ist die gesuchte Differentialgleichung.

Berechnen der Variation

H ist definiert als

$$H = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} A dt \quad (31)$$

und L ist die LAGRANGE-Funktion, die sich aus der kinetischen Energie K und der potentiellen Energie U zusammensetzt als

$$L = K - U \quad (32)$$

Die kinetische Energie der schwingenden Saite mit konstanter Massebelegung ist:

$$K = \frac{1}{2} \mu \int_0^l \dot{w}^2 dx \quad (33)$$

Die potentielle Energie der undeformbaren Saite ist das Potential der Spannkraft F_s (Herleitung weiter unten unter **Berechnung des Potentials der Vorspannkraft**). Dieses ist:

$$U = \frac{1}{2} F_s \int_0^l w'^2 dx \quad (34)$$

Das Wirkungsfunktional H setzt sich also aus zwei Anteilen zusammen

$$H = \int_{t_1}^{t_2} \{ K - U \} dt \quad (35)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \mu \int_0^l \dot{w}^2 dx - \frac{1}{2} F_s \int_0^l w'^2 dx \right\} dt \quad (36)$$

$$= \frac{1}{2} \mu \underbrace{\iint_{tx} \dot{w}^2 dx dt}_{H_K} - \frac{1}{2} F_s \underbrace{\iint_{tx} w'^2 dx dt}_{H_U} \quad (37)$$

Und für die Variation gilt

$$\delta H = \delta \left\{ \frac{1}{2} \mu H_K - \frac{1}{2} F_s H_U \right\} \quad (38)$$

$$\delta H = \frac{1}{2} \mu \delta H_K - \frac{1}{2} F_s \delta H_U \quad (39)$$

Nun können die Variationen von H_K und H_U nach Definition der Variation berechnet werden:

$$\delta H_T = \iint_{tx} 2 \dot{w} \delta \dot{w} dx dt \quad (40)$$

$$\delta H_U = \iint_{tx} 2 w' \delta w' dx dt \quad (41)$$

Damit erhält man insgesamt

$$\delta H = \mu \iint_{tx} \dot{w} \delta \dot{w} dx dt - F_s \iint_{tx} w' \delta w' dx dt \quad (\delta H)$$

Berechnen von $\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \dot{w} \delta \dot{w} dx dt$ **usw.**

w und δw und ihre Zeitableitungen sind orts- und zeitabhängige Funktionen: $w = w(x, t)$, $\delta w = \delta w(x, t)$. Der

Term $\int_{t_1}^{t_2} \dot{w} \delta \dot{w} dt$ soll durch partielle Integration berechnet

werden mit dem Ziel, die Variation selbst (also δw) zu faktorisieren. Dies geschieht so:

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{w} \delta \dot{w} dt = \int_{t_1}^{t_2} [(\dot{w} \delta w)' - \ddot{w} \delta w] dt \quad (42)$$

$$= (\dot{w} \delta w)(t_2) - (\dot{w} \delta w)(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w} \delta w dt \quad (43)$$

$$= \dot{w}(t_2) \delta w(t_2) - \dot{w}(t_1) \delta w(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w} \delta w dt \quad (44)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{w} \delta \dot{w} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w} \delta w \quad (\text{part t})$$

weil $\delta w(x, t_1) = \delta w(x, t_2) = 0$. Von den Variationen $\delta w(x, t)$ fordert man also, dass sie zur Anfangs- und Endzeit (t_1 und t_2) des Prozesses überall ($\forall x$) verschwinden.

Nun soll der Term $\int_0^l w' \delta w' dx$ ebenfalls mit partieller Integration berechnet werden, damit auch hier δw faktorisiert werden kann:

$$\int_0^l w' \delta w' dx = \int_0^l [(w' \delta w)' - w'' \delta w] dx \quad (45)$$

$$= (w' \delta w)(l) - (w' \delta w)(0) - \int_0^l w'' \delta w dx \quad (46)$$

$$= w'(l) \delta w(l) - w'(0) \delta w(0) - \int_0^l w'' \delta w dx \quad (47)$$

$$\int_0^l w' \delta w' dx = - \int_0^l w'' \delta w dx \quad (\text{part x})$$

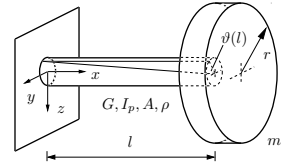
Denn die geometrischen Randbedingungen sollen auch von den Variationen erfüllt werden, d.h. $\delta w(0) = \delta w(l) = 0$.

(part t) und (part x) können nun in (δH) eingesetzt werden.

Hausaufgaben

Aufgabe 82

Ein eingespannter, massebehafteter Stab mit kreisförmigem Querschnitt trägt an seinem Ende eine Einzelmasse.



(a) Wie lautet die *geometrische* Randbedingung für das System?

(b) Berechnen Sie die kinetische Energie K und die potentielle Energie U für das Gesamtsystem.

(c) Formulieren Sie das Prinzip von HAMILTON für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamische* Randbedingung her.

Geg.: l, m, G, I_p, A, ρ, r

(a) Geometrische Randbedingung: An der Einspannung ist der Verdrehwinkel Null!

$$\vartheta(0, t) = 0 \quad \forall t \quad (48)$$

$$\Rightarrow \delta \vartheta(0, t) = 0 \quad \forall t \quad (49)$$

(b) Lagrange-Funktion $L = K - U$ mit ...

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \rho I_p \dot{\vartheta}^2 + \underbrace{J_m}_{\frac{m}{2} r^2} \dot{\vartheta}^2 \delta(x-l) \right\} dx \quad (50)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \rho I_p \dot{\vartheta}^2 dx + \frac{m}{4} r^2 \dot{\vartheta}^2(l, t)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l G I_p \vartheta'^2 dx \quad (51)$$

(c) Da keine nicht konservativen Kräfte zu berücksichtigen sind, folgt $\delta A = 0$ und damit das Prinzip von HAMILTON in der Form:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - U) dt = 0 \quad (52)$$

(d) Die Bewegungsdifferentialgleichung und die dynamischen Randbedingungen fallen nach Ausführung der Variation ab: Aus Gleichung (52) folgt:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \rho I_p \dot{\vartheta}^2 dx + \frac{m}{4} r^2 \dot{\vartheta}^2(l, t) - \frac{1}{2} \int_0^l G I_p \vartheta'^2 dx \right\} dt = 0 \quad (53)$$

Variation unter die Integrale ziehen:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \rho I_p \delta \dot{\vartheta}^2 dx + \frac{m}{4} r^2 \delta \dot{\vartheta}^2(l, t) - \frac{1}{2} \int_0^l G I_p \delta \vartheta'^2 dx \right\} dt = 0 \quad (54)$$

Durchführen der Variation:

$$\delta\dot{\vartheta}^2 = 2\dot{\vartheta}\delta\dot{\vartheta} \quad (55)$$

$$\delta\vartheta'^2 = 2\vartheta'\delta\vartheta' \quad (56)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l \rho I_p \dot{\vartheta} \delta \dot{\vartheta} dx + \frac{m}{2} r^2 \dot{\vartheta}(l, t) \delta \dot{\vartheta}(l, t) - \int_0^l G I_p \vartheta' \delta \vartheta' dx \right\} dt = 0 \quad (57)$$

Im Folgenden werden die drei Terme aus Gleichung (57) gesondert betrachtet. Dabei werden, um $\delta\vartheta$ zu faktorisieren partielle Integrationen durchgeführt.

I:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \rho I_p \dot{\vartheta} \delta \dot{\vartheta} dx dt = \int_0^l \underbrace{[\rho I_p \dot{\vartheta} \delta \vartheta]_{t_0}^{t_1}}_{=0} dx - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \rho I_p \ddot{\vartheta} \delta \vartheta dx dt$$

= 0, siehe Voraussetzungen von Hamilton

(58)

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \rho I_p \ddot{\vartheta} \delta \vartheta dx dt \quad (59)$$

II:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{m}{2} r^2 \dot{\vartheta}(l, t) \delta \dot{\vartheta}(l, t) dt = \underbrace{\left[\frac{m}{2} r^2 \dot{\vartheta}(l, t) \delta \vartheta(l, t) \right]_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{m}{2} r^2 \ddot{\vartheta}(l, t) \delta \vartheta(l, t) dt \quad (60)$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{m}{2} r^2 \ddot{\vartheta}(l, t) \delta \vartheta(l, t) dt \quad (61)$$

III:

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l G I_p \vartheta' \delta \vartheta' dx dt = - \int_{t_0}^{t_1} [G I_p \vartheta' \delta \vartheta]_0^l dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l G I_p \vartheta'' \delta \vartheta dx dt \quad (62)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta(0) = 0 \\ \downarrow \\ \delta \vartheta(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow = - \int_{t_0}^{t_1} G I_p \vartheta'(l, t) \delta \vartheta(l, t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l G I_p \vartheta'' \delta \vartheta dx dt \quad (63)$$

Alles wieder ins Prinzip von Hamilton einsetzen und sortieren:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left(-\rho I_p \ddot{\vartheta} + G I_p \vartheta'' \right) \delta \vartheta dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \left[-\frac{m}{2} r^2 \ddot{\vartheta}(l, t) - G I_p \vartheta'(l, t) \right] \delta \vartheta(l, t) dt = 0 \quad (64)$$

Da die Variationen $\delta\vartheta$ und $\delta\vartheta(l, t)$ unabhängig voneinander sind, müssen die Terme davor verschwinden, um die Gleichung zu erfüllen:

$$\stackrel{(64)}{\Rightarrow} \rho I_p \ddot{\vartheta} = G I_p \vartheta'' \quad (65)$$

$$\Rightarrow \ddot{\vartheta} = c^2 \vartheta'' \quad \text{mit} \quad c^2 = \frac{G}{\rho} \quad (66)$$

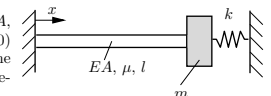
Das ist die Bewegungsdifferentialgleichung.

$$\stackrel{(64)}{\Rightarrow} -\frac{m}{2} r^2 \ddot{\vartheta}(l, t) - G I_p \vartheta'(l, t) = 0 \quad (67)$$

Das ist die dynamische Randbedingung, welche man auch aus dem Freischnitt der Einzelmassa hätte herleiten können.

Aufgabe 87

Ein massebehafteter elastischer Stab (Dehnsteifigkeit EA , Massebelegung μ , Länge l) ist am linken Rand ($x = 0$) fest eingespannt und trägt am rechten Rand ($x = l$) eine Punktmassa m . Die Punktmassa ist außerdem über eine Feder (Steifigkeit k) an die Umgebung gekoppelt. Die Feder sei entspannt, wenn der Stab unverformt ist. Es werden ausschließlich Längsschwingungen $u(x, t)$ betrachtet.



- (a) Wie lautet die *geometrische* Randbedingung für das System?
- (b) Wie berechnen sich die kinetische Energie K und die potentielle Energie U für das Gesamtsystem?
- (c) Formulieren Sie das Prinzip von HAMILTON für das untersuchte System.
- (d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamische* Randbedingung her. Geg.: $m, k, l, EA = \text{konst.}, \mu := \rho A = \text{konst.}$.

(a) Geometrische Randbedingung:

$$u(0, t) = 0 \quad \forall t \quad (68)$$

$$\Rightarrow \delta u(0, t) = 0 \quad \forall t \quad (69)$$

(b) Kinetische und potenzielle Energie des Systems:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{u}^2 dx + \frac{1}{2} m \dot{u}(l, t)^2 \quad (70)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EA u'^2 dx + \frac{1}{2} k u(l, t)^2 \quad (71)$$

$$(72)$$

(c) Aufstellen des Prinzips von Hamilton:

$$\delta H = 0 \quad (73)$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0 \quad (\text{PdkW})$$

$$\text{mit } L = K - U \quad \text{und} \quad \delta A = 0 \quad (74)$$

Jetzt kommt das große Einsetzen:

$$H = H_T + H_m - H_U - H_k \quad (86)$$

$$\delta H = \delta H_T + \delta H_m - \delta H_U - \delta H_k \quad (87)$$

wird in (PdkW) eingesetzt. Außerdem beachtet man noch die geometrische Randbedingung $u(0) = 0$ und daraus resultierend $\delta u(0) = 0$. Alles zusammen liefert:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^l (-\mu \ddot{u} + EAu'') \delta u dx \dots \right. \\ \left. \dots (EAu'|_l + ku|_l + m\ddot{u}|_l) \delta u|_l \right] dt \quad (88)$$

(d) Auswertung des Prinzips von Hamilton liefert die Bewegungsdifferentialgleichung und die dynamische Randbedingung:

Die folgenden Abkürzungen werden eingeführt:

$$H_T := \frac{1}{2} \mu \iint_{t,x} \dot{u}^2 dx dt \quad (75)$$

$$H_m := \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}|_l^2 dt \quad (76)$$

$$H_U := \frac{1}{2} EA \iint_{t,x} u'^2 dx dt \quad (77)$$

$$H_k := \frac{1}{2} k \int_{t_1}^{t_2} u|_l^2 dt \quad (78)$$

Und daraus folgt die Bewegungsdifferentialgleichung und die dynamische Randbedingung bei $x = l$:

$$\mu \ddot{u} = EAu'' \quad (89)$$

$$EAu'|_l + ku|_l + m\ddot{u}|_l = 0 \quad (90)$$

Variationen:

$$\delta H_T := \mu \iint_{t,x} \dot{u} \delta \dot{u} dx dt \quad (79)$$

$$\delta H_m := m \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}|_l \delta \dot{u}|_l dt \quad (80)$$

$$\delta H_U := EA \iint_{t,x} u' \delta u' dx dt \quad (81)$$

$$\delta H_k := k \int_{t_1}^{t_2} u|_l \delta u|_l dt \quad (82)$$

Partielle Integrationen mit dem Ziel, δu zu faktorisieren::

$$\delta H_T: \int_{t_1}^{t_2} \dot{u} \delta \dot{u} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u} \delta u dt \quad (83)$$

$$\delta H_m: \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}|_l \delta \dot{u}|_l dt = - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}|_l \delta u|_l dt \quad (84)$$

$$\delta H_U: \int_0^l u' \delta u' dx = - \int_0^l u'' \delta u dx + u' \delta u|_l - u' \delta u|_0 \quad (85)$$

Es wurde hier schon (in den ersten beiden der drei Gleichungen) ausgenutzt, dass die Variationen bei t_1 und t_2 Null sind.