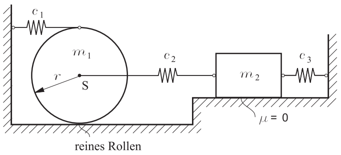
Tutorium

Aufgabe 19

(a) Für das skizzierte System stelle man das Bewegungsdifferentialgleichungssystem auf und schreibe es auf Matrizenform um. Es sollen von vornherein kleine Auslenkungen angenommen werden.

(b) Man berechne die Eigenkreisfrequenzen und die dazugehörigen Eigenformen des Systems.



Geg.: $c_1 = \frac{1}{4}c$, $c_2 = c_3 = c$, $m_1 = \frac{2}{3}m$, $m_2 = m$, $\Theta_S = \frac{1}{2}m_1 r^2$, r

(a) Aufstellen der potentiellen und kinetischen Energie:

$$U = \frac{1}{2}c_1(2x_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}c_3 x_2^2 \tag{1}$$
$$= \frac{c}{8}4x_1^2 + \frac{1}{2}c(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}cx_2^2 \tag{2}$$
$$= \frac{1}{2}cx_1^2 + \frac{1}{2}c(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}cx_2^2 \tag{3}$$

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\theta_S\left(\frac{\dot{x}_1}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \tag{4}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{2}{3}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{2}{3}mr^2\frac{\dot{x}_1^2}{r^2} + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \tag{5}$$
$$= \frac{2}{6}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{6}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \tag{6}$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \tag{7}$$

Lagrangefunktion:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \left(\frac{1}{2}cx_1^2 + \frac{1}{2}c(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}cx_2^2\right) \tag{8}$$

Lagrange-Gleichungen 2.Art für konservative Systeme:

Generalisierte Koordinate: x_1

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \tag{9}$$

$$m\ddot{x}_1 + cx_1 + c(x_1 - x_2) = 0 \tag{10}$$
$$\ddot{x}_1 + \frac{2c}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 = 0 \tag{11}$$

Generalisierte Koordinate: x_2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \tag{12}$$

$$m\ddot{x}_2 - c(x_1 - x_2) + cx_2 = 0 \tag{13}$$
$$\ddot{x}_2 + \frac{2c}{m}x_2 - \frac{c}{m}x_1 = 0 \tag{14}$$

Darstellung der Bewegungsdifferenzialgleichungen in Matrizenform

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}2\frac{c}{m} & -\frac{c}{m}\\ -\frac{c}{m} & 2\frac{c}{m}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{15}$$

mit $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ gilt:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}2\omega_0^2 & -\omega_0^2\\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{16}$$

(b) Ansatz:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t} \tag{17}$$

Einsetzen in (16)

$$\begin{bmatrix}\lambda^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2\\ -\omega_0^2 & \lambda^2 + 2\omega_0^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{pmatrix}\underbrace{\mathrm{e}^{\lambda t}}_{\neq 0} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2\\ -\omega_0^2 & \lambda^2 + 2\omega_0^2\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{19}$$

Dieses Differentialgleichungssystem hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante von $\underline{\underline{A}}$ gleich Null ist.

$$\det \underline{\underline{A}} \overset{!}{=} 0 = \left(\lambda^2 + 2\omega_0^2\right)^2 - \omega_0^4 \tag{20}$$
$$= \lambda^4 + 4\lambda^2\omega_0^2 + 4\omega_0^4 - \omega_0^4 \tag{21}$$
$$= \lambda^4 + 4\lambda^2\omega_0^2 + 3\omega_0^4 \tag{22}$$

Mit p-q-Formel folgt für λ^2

$$\lambda_{I/II}^2 = -2\omega_0^2 \pm \sqrt{4\omega_0^4 - 3\omega_0^4} \tag{23}$$
$$\lambda_I^2 = -\omega_0^2 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm i\omega_0 \tag{24}$$
$$\lambda_{II}^2 = -3\omega_0^2 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_{3/4} = \pm i\sqrt{3}\omega_0 \tag{25}$$

$\Rightarrow$ die Eigenkreisfrequenzen sind $\omega_1 = \omega_0$ und $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$.

Um die Eigenformen zu bestimmen, müssen die λ_i wieder in die DGL (19) eingesetzt werden.

für $\lambda_{3/4} = \pm i\sqrt{3}\omega_0$

$$\begin{bmatrix} -3\omega_0^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -3\omega_0^2 + 2\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Da die Eigenformen nur bekannt sind bis auf einen konstanten Faktor wird hier $\hat{x}_1 = 1$ gesetzt.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Wertet man die erste Zeile aus, so folgt:

$$-\omega_0^2 - \omega_0^2 \hat{x}_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{x}_2 = -1 \tag{28}$$

Damit folgt die zweite Eigenform zu

$$\underline{x}_{3/4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

für $\lambda_{1/2} = \pm i\omega_0$

$$\begin{bmatrix} -\omega_0^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 + 2\omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Da die Eigenformen nur bekannt ist bis auf einen konstanten Faktor wird hier $\hat{x}_1 = 1$ gesetzt.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

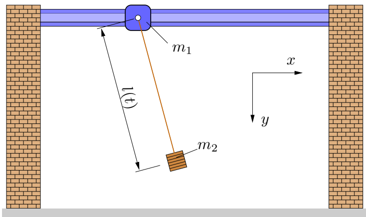
Wertet man die erste Zeile aus, so folgt:

$$\omega_0^2 - \omega_0^2 \hat{x}_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{x}_2 = 1 \tag{32}$$

Damit folgt die erste Eigenform zu

$$\underline{x}_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

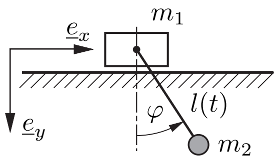
Aufgabe 20 (Tut)



Die Aufhängevorrichtung eines ebenen Pendels mit der zeitlich veränderlichen Länge $l(t)$ und der Pendelmasse m_2 gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen Führung und hat die Masse m_1.

Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System.

Geg.: m_1, m_2, $l(t)$, g



Kinematik:

Das System hat 2 Freiheitsgrade, weshalb 2 generalisierte Koordinaten gewählt werden.

$$q_1 = x \text{ Koordinate zum Mittelpunkt der Masse } m_1 \tag{34}$$
$$q_2 = \varphi \text{ Drehwinkel (siehe Skizze)} \tag{35}$$

$$\underline{r}_1 = x\underline{e}_x \;\Rightarrow\; \underline{v}_1 \equiv \dot{\underline{r}}_1 = \dot{x}\underline{e}_x \tag{36}$$
$$\underline{r}_2 = \underline{r}_1 + \underline{r}_{12} = x\underline{e}_x + l(t)\sin\varphi\underline{e}_x + l(t)\cos\varphi\underline{e}_y \tag{37}$$
$$\Rightarrow \underline{v}_2 \equiv \dot{\underline{r}}_2 \tag{38}$$
$$= \left(\dot{x} + \dot{l}\sin\varphi + l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)\underline{e}_x + \left(\dot{l}\cos\varphi - l\sin\varphi\dot{\varphi}\right)\underline{e}_y$$

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 \\ &\quad \left[\left(\dot{x} + \dot{l}\sin\varphi + l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 + \left(\dot{l}\cos\varphi - l\sin\varphi\dot{\varphi}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_2\left(\dot{x}\dot{l}\sin\varphi + \dot{x}l\cos\varphi\dot{\varphi}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2\left[\left(\dot{l}\sin\varphi + l\cos\varphi\dot{\varphi}\right)^2 + \left(\dot{l}\cos\varphi - l\sin\varphi\dot{\varphi}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_2\left(\dot{x}\dot{l}\sin\varphi + \dot{x}l\cos\varphi\dot{\varphi}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\right) \end{aligned} \tag{39}$$

Potientelle Energie:

$$U = -m_2 g\, l(t)\cos\varphi \tag{40}$$

Lagrange - Funktion:

$$\begin{aligned} L &= K - U \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_2\left(\dot{x}\dot{l}\sin\varphi + \dot{x}l\cos\varphi\dot{\varphi}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\right) + m_2 g\, l(t)\cos\varphi \end{aligned} \tag{41}$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1+m_2)\dot{x} + m_2\big(\dot{l}\sin\varphi + l\cos\varphi\dot{\varphi}\big) \tag{42}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big) = (m_1+m_2)\ddot{x} + m_2 \big(\ddot{l}\sin\varphi + 2\dot{l}\cos\varphi\dot{\varphi} - l\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\ddot{\varphi}\big) \tag{43}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{44}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2\big(\dot{x}l\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}\big) \tag{45}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\Big) = m_2\big(\ddot{x}l\cos\varphi + \dot{x}\dot{l}\cos\varphi - \dot{x}l\sin\varphi\dot{\varphi} + 2l\dot{l}\dot{\varphi} + l^2\ddot{\varphi}\big) \tag{46}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2\big(\dot{x}\dot{l}\cos\varphi - \dot{x}l\sin\varphi\dot{\varphi}\big) - m_2 gl\sin\varphi \tag{47}$$

$$\alpha = \big(\dot{x}\dot{l}\cos\varphi - \dot{x}l\sin\varphi\dot{\varphi}\big) \tag{48}$$

Lagrange - Gleichungen 2.Art:

für konservative Systeme

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{49}$$

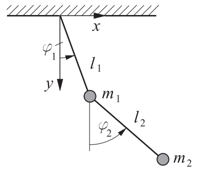
Bewegungsdifferentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)\ddot{x} + m_2\big(\ddot{l}\sin\varphi + 2\dot{l}\cos\varphi\dot{\varphi} \\ -l\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + l\cos\varphi\ddot{\varphi}\big) = 0 \\ \ddot{x}l\cos\varphi + 2l\dot{l}\dot{\varphi} + l^2\ddot{\varphi} + gl\sin\varphi = 0\end{aligned}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 17 (Ha)

Zwei masselose Stangen (Längen l_1 und l_2) und zwei Punktmassen m_1 und m_2 bilden ein Doppelpendel.



(a) Bestimme für die Bewegung des skizzierten Doppelpendels in einer vertikalen Ebene (Erdbeschleunigung g) mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichungen. Nutze die generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2.

(b) Wie lauten die Gleichgewichtslagen?

Geg.: m_1, m_2, l_1, l_2, g

a) Das Nullniveau für die potentielle Energie liege bei $y = 0$.

$$U = -gm_1y_1 - gm_2y_2 \tag{50}$$

Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2}m_1\Big(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\Big) + \frac{1}{2}m_2\Big(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\Big) \tag{51}$$

Kinematische Beziehungen: Drücke die in (50) und (51) vorkommenden kinematischen Größen aus als Funktion der beiden (willkürlich gewählten) generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2. (System hat 2 Freiheitsgrade)

$$y_1 = l_1\cos\varphi_1 \qquad \dot{y}_1 = -\dot{\varphi}_1\, l_1\sin\varphi_1 \tag{52}$$

$$x_1 = l_1\sin\varphi_1 \qquad \dot{x}_1 = \dot{\varphi}_1\, l_1\cos\varphi_1 \tag{53}$$

$$y_2 = y_1 + l_2\cos\varphi_2 \qquad \dot{y}_2 = \dot{y}_1 - \dot{\varphi}_2\, l_2\sin\varphi_2 \tag{54}$$

$$x_2 = x_1 + l_2\sin\varphi_2 \qquad \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{\varphi}_2\, l_2\cos\varphi_2 \tag{55}$$

Die Lagrangefunktion ergibt sich damit zu:

$$L = K - U \tag{56}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\varphi}_1^2\Big(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1\Big) \\ &+ \frac{1}{2}m_2\Big[\dot{\varphi}_1^2 l_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 l_2^2 + 2\dot{\varphi}_1 l_1\dot{\varphi}_2 l_2 \\ &\qquad \Big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\Big)\Big] \\ &+ g(m_1+m_2)l_1\cos\varphi_1 + gm_2l_2\cos\varphi_2 \end{aligned} \tag{57}$$

mit $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ und $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 \\ &+ m_2\dot{\varphi}_1 l_1\dot{\varphi}_2 l_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ &+ g(m_1+m_2)l_1\cos\varphi_1 + gm_2l_2\cos\varphi_2 \end{aligned} \tag{58}$$

Für die Lagrangesche Gleichungen 2.Art

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = 0, \qquad i = 1,2 \tag{59}$$

benötigen wir die Ableitungen

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2) - g(m_1+m_2)l_1\sin\varphi_1 \tag{60}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\sin(\varphi_1-\varphi_2) - gm_2l_2\sin\varphi_2 \tag{61}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} = (m_1+m_2)l_1^2\dot\varphi_1 + m_2 l_1 l_2 \dot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \tag{62}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1}\Big) &= (m_1+m_2)l_1^2\ddot\varphi_1\\ &\quad + m_2 l_1 l_2\Big[\ddot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\\ &\quad - (\dot\varphi_1-\dot\varphi_2)\dot\varphi_2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big]\end{aligned} \tag{63}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} = m_2 l_2^2\dot\varphi_2 + m_2 l_1 l_2\dot\varphi_1\cos(\varphi_1-\varphi_2) \tag{64}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2}\Big) &= m_2 l_2^2\ddot\varphi_2 + m_2 l_1 l_2\Big[\ddot\varphi_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)\\ &\quad - \dot\varphi_1(\dot\varphi_1-\dot\varphi_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big]\end{aligned} \tag{65}$$

Eingesetzt in (59) erhalten wir die beiden Bewegungsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned}l_1\ddot\varphi_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}l_2\Big[\ddot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \dot\varphi_2^2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big]&\\ + g\sin\varphi_1 = 0&\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}l_2\ddot\varphi_2 + l_1\Big[\ddot\varphi_1\cos(\varphi_1-\varphi_2) - \dot\varphi_1^2\sin(\varphi_1-\varphi_2)\Big]&\\ + g\sin\varphi_2 = 0&\end{aligned} \tag{67}$$

b)

$$\text{Gleichgewicht}: \quad \dot\varphi_{i,G} = 0, \quad \ddot\varphi_{i,G} = 0 \tag{68}$$

$$\text{aus (66):} \quad g\sin\varphi_{1,G} = 0 \tag{69}$$

$$\text{aus (67):} \quad g\sin\varphi_{2,G} = 0 \tag{70}$$

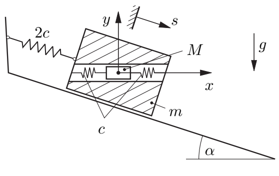
$$\varphi_{1,G} = k\pi, \quad k = 0,1,2... \tag{71}$$

$$\varphi_{2,G} = m\pi, \quad m = 0,1,2... \tag{72}$$

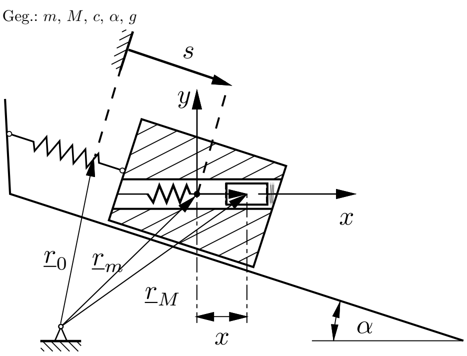
Gleichgewicht herrscht, wenn jedes Pendel entweder genau senkrecht hängt oder genau senkrecht nach oben steht.

Aufgabe 21 (Ha)

Auf einer schiefen Ebene bewegt sich reibungsfrei ein Körper der Masse m, Bewegungskoordinate s, infolge der Schwerkraft abwärts. In einer radialen Bohrung ist ein Zylinder der Masse M, der Relativkoordinate x, elastisch angeordnet, der sich ebenfalls reibungsfrei bewegen kann. Ausgehend von der Ruhelage des Systems sind mit den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsdifferentialgleichungen für die generalisierten Koordinaten s und x aufzustellen.



Geg.: m, M, c, α, g



1. Ortsvektoren und Kinematik

$$\underline{r}_m = \underline{r}_0 + s\cos\alpha\underline{e}_x - s\sin\alpha\underline{e}_y \tag{73}$$

$$\big|\underline{\dot r}_m\big|^2 = \dot s^2 \tag{74}$$

$$\underline{r}_M = \underline{r}_m + x\underline{e}_x \tag{75}$$

$$= (x + s\cos\alpha)\underline{e}_x - s\sin\alpha\underline{e}_y \tag{76}$$

$$\big|\underline{\dot r}_M\big|^2 = \dot x^2 + \dot s^2 + 2\,\dot x\dot s\cos\alpha \tag{77}$$

Dabei ist $\underline{r}_0$ der Vektor vom beliebigen, festen Punkt zum Schwerpunkt des Systems in der Ausgangslage.

2. Kinetische Energie:

$$K = \frac{1}{2}m\big|\underline{\dot r}_m\big|^2 + \frac{1}{2}M\big|\underline{\dot r}_M\big|^2 \tag{78}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot s^2 + \frac{1}{2}M\big(\dot x^2 + \dot s^2\big) + M\dot x\dot s\cos\alpha \tag{79}$$

3. Potentielle Energie:

$$U = -(M+m)gs\sin\alpha + \frac{1}{2}2c\cdot s^2 + \frac{1}{2}2c\cdot x^2 \tag{80}$$

4. Lagrangesche Funktion:
(Generalisierte Koordinaten: s und x)

$$L = K - U \tag{81}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}m\dot s^2 + \frac{1}{2}M\big(\dot x^2+\dot s^2\big) + M\dot x\dot s\cos\alpha\\ &\quad + \underbrace{(M+m)}_{=:\,m_{\text{ges}}}gs\sin\alpha - c\big(s^2+x^2\big)\end{aligned} \tag{82}$$

5. Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot s} = m_{\text{ges}}\dot s + M\dot x\cos\alpha \tag{83}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot s}\Big) = m_{\text{ges}}\ddot s + M\ddot x\cos\alpha \tag{84}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = m_{\text{ges}}g\sin\alpha - 2cs \tag{85}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot x} = M\dot x + M\dot s\cos\alpha \tag{86}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\Big) = M\ddot x + M\ddot s\cos\alpha \tag{87}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2cx \tag{88}$$

6. Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\Big) - \Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}\Big) = 0 \qquad i = 1,2 \tag{89}$$

Ausgewertet ergibt sich für $i = 1$ mit $q_1 = s$:

$$m_{\text{ges}}\ddot s + 2cs + M\cos\alpha\ddot x \;=\; m_{\text{ges}}g\sin\alpha \tag{90}$$

und für $i = 2$ mit $q_2 = x$:

$$M\cdot\ddot x + 2cx + M\cos\alpha\ddot s \;=\; 0. \tag{91}$$