1 Sätze von Castigliano

Mit dem in der letzten Übungswoche behandelten Ritz-Verfahren konnten wir unter anderem Verschiebungen näherungsweise berechnen. In dieser Woche geht es um exakte Berechnungen innerhalb der Statik deformierbarer Systeme. Insbesondere sollen die Sätze von Castigliano zur Anwendung kommen, mit denen Verschiebungen/Verdrehungen an beliebigen Stellen des mechanischen Systems berechnet werden können. Außerdem kann bei bekannten Verschiebungen/Verdrehungen auf die dort wirkenden äußeren Einzelkräfte/Einzelmomente geschlossen werden. Auf eine elegante Weise werden mit Hilfe der Sätze von Castigliano sogar die Auflagerreaktionen von statisch unbestimmt gelagerten Systemen einer Berechnung zugänglich.

1.1 Erster Satz von Castigliano

Nehmen wir an, dass für ein durch äußere Kräfte Q_i beanspruchtes elastisches System die Formänderungsenergie W als eindeutige Funktion der Verschiebungen q_i der Kraftangriffspunkte in Richtung der äußeren Kräfte vorliegt, dann gilt folgender Satz:

Die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach einer der Verschiebungen q_i ergibt die zugehörige (skalare) Kraftkomponente Q_i in Richtung der Verschiebung:

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{mit} \quad W = W(q_i)}. \tag{1}$$

Wenn wir Q_i als generalisierte Kraft und q_i als generalisierte Koordinate/Verschiebung interpretieren, dann können in gleicher Weise die zu den Verdrehungen zugehörigen äußeren Einzelmomente berechnet werden. Durch die Bezeichnung „generalisiert“ ist zudem sofort klar, dass die Verschiebungen/Verdrehungen in Richtung der Kraftgrößen gemeint sind.

Bemerkung:
Der erste Satz von Castigliano gilt auch für **nicht-linear elastisches** Materialverhalten!

1.2 Erster Satz von Engesser⟶ Zweiter Satz von Castigliano

Nehmen wir nun an, dass die an einem elastischen System wirkenden äußeren, generalisierten Kräfte Q_i gegeben sind und die komplementäre Formänderungsenergie W^* als eindeutige Funktion der generalisierten Kräfte Q_i vorliegt, dann gilt der **erste Satz von Engesser**:

Die partielle Ableitung der komplementären Formänderungsenergie nach einer der generalisierten Kräfte Q_i ergibt die zugehörige generalisierte Verschiebung q_i:

$$\boxed{\frac{\partial W^*}{\partial Q_i} = q_i \quad \text{mit} \quad W^* = W^*(Q_i)}. \tag{2}$$

Wiederum enthält die Bezeichnung „generalisiert“, dass beispielsweise die zu einer Kraft zugehörige Verschiebung des Kraftangriffspunktes in Richtung der Kraft gemeint ist.

Bemerkung:
Der erste Satz von Engesser gilt auch für **nicht-linear elastisches** Materialverhalten! Im Sonderfall von **linear-elastischem** Materialverhalten, müssen wir zwischen der Formänderungsenergie und der komplementären Formänderungsenergie nicht unterscheiden - sie sind gleich! Daraus folgt

der **zweite Satz von Castigliano**:

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial Q_i} = q_i \quad \text{mit} \quad W = W\left(Q_i\right)}. \tag{3}$$

Wie aus obiger Gleichung hervorgeht, wird die Formänderungsenergie als Funktion der Kraftgrößen benötigt.

1.3 Zweiter Satz von Engesser $\longrightarrow$ Satz von Menabrea

Nehmen wir nun an, es liegt ein einfach statisch unbestimmt gelagertes mechanisches System vor. Dann können wir durch Freimachen einer Lagerreaktion X_k das System in ein statisch bestimmtes Ersatzsystem überführen. In diesem Ersatzsystem ist X_k eine (unbekannte) äußere Kraft. Die komplementäre Formänderungsenergie des Ersatzsystems ist dann abhängig von den bekannten äußeren Kräften Q_i und der Statisch Unbestimmten X_k, also $W^* = W^*\left(Q_i, X_k\right)$. Wenn wir nun den ersten Satz von Engesser zur Berechnung der Verschiebung an der Kraftangriffsstelle der Statisch Unbestimmten X_k anwenden, erhalten wir die zugehörige generalisierte Verschiebung. Im Originalsystem ist dort aber ein Lager, so dass die Verschiebung **Null** sein muss:

$$\boxed{\frac{\partial W^*}{\partial X_k} = 0 \quad \text{mit} \quad W^* = W^*\left(Q_i, X_k\right)}. \tag{4}$$

Aus dieser Forderung lässt sich die unbekannte Auflagerreaktion X_k ermitteln! Obige Gleichung bildet den **zweiten Satz von Engesser**.

Bemerkung:
Der zweite Satz von Engesser gilt natürlich auch für **nicht-linear elastisches** Materialverhalten! Im Sonderfall von **linear-elastischem** Materialverhalten, folgt daraus der **Satz von Menabrea**:

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial X_k} = 0 \quad \text{mit} \quad W = W\left(Q_i, X_k\right)}. \tag{5}$$

1.4 Allgemeines Lösungskonzept

...zur Anwendung des zweiten Satzes von Castigliano

Gesucht sei die generalisierte Verschiebung an einer bestimmten Stelle des Systems.

1. Platzierung einer generalisierten Kraft $\hat{Q}_i$ an der Stelle, an der die generalisierte Verschiebung gesucht ist. Wenn dort bereits eine Kraftgröße wirkt Q_i, ist dieser Schritt nicht notwendig.
2. Berechnung der Formänderungsenergie des Systems. Besteht das System aus mehreren Stäben und Balkenelementen, so sind alle Beiträge in der Formänderungsenergie zu berücksichtigen. Dazu müssen in einem ersten Schritt die Schnittlasten in den einzelnen Elementen berechnet werden. Benötigt wird die Formänderungsenergie als Funktion der generalisierten Kräfte.
3. Anwendung des zweiten Satzes von Castigliano zur Berechnung der generalisierten Verschiebung an der Stelle der angreifenden generalisierten Kraft:

$$\frac{\partial W}{\partial Q_i} = q_i \quad \text{mit} \quad W = W\left(Q_i\right). \tag{6}$$

Wurde an dieser Stelle die Kraft $\hat{Q}_i$ extra eingeführt, dann ist nach Anwendung des zweiten Satzes von Castigliano diese Kraft im Anschluss gleich Null zu setzen:

$$\left.\frac{\partial W(\hat{Q}_i)}{\partial \hat{Q}_i}\right|_{\hat{Q}_i=0} = q_i \tag{7}$$

- im Originalsystem wirkt dort ja gerade keine Kraft!

Bemerkung:
Es ist sinnvoll, vor der integralen Berechnung der Formänderungsenergie nach der generalisierten Kraft Q_i bzw $\hat{Q}_i$ abzuleiten. Exemplarisch gilt für den Biegebalken:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial Q_i} &= \frac{\partial}{\partial Q_i}\int \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{M}{EI}\cdot\frac{\partial M}{\partial Q_i}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Die anschließende Integration ist deutlich leichter, als eine Vorabberechnung von W. Es sei angemerkt, dass für die Erleichterung der Integration in obiger Formel eigens Superpositionstafeln entwickelt wurden, auf deren Anwendung wir hier verzichten wollen.