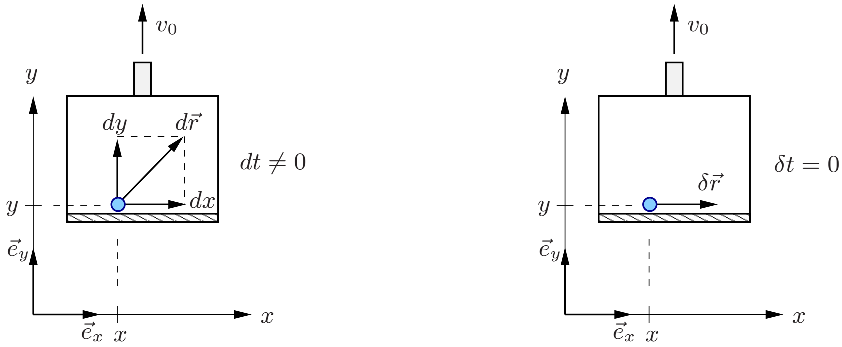
Nachtrag: Zum Unterschied zwischen reeller und virtueller Verschiebung



Um den kleinen aber feinen Unterschied zwischen einer gedachten (virtuellen) Verschiebung und einer reellen Verschiebung deutlich zu machen, betrachten wir das System aus der oberen Abbildung: Ein Fahrstuhl bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 nach oben, während sich eine Punktmasse auf dem Boden des Fahrstuhls nach rechts bewegt. Der Ortsvektor lautet

$$\vec{r}\,(t) = x\,(t)\,\vec{e}_x + y\,(t)\,\vec{e}_y \tag{1}$$

Reelle Verschiebung:

Das Differenzial der reellen Verschiebung lautet dann

$$\begin{aligned} d\vec{r}\,(t) &= dx\,(t)\,\vec{e}_x + dy\,(t)\,\vec{e}_y \qquad (2) \\ &= dx\,(t)\,\vec{e}_x + v_0 dt\,\vec{e}_y. \end{aligned}$$

Das Verschiebungsdifferenzial $d\vec{r}\,(t)$ ist linkerhand in der oberen Abbildung eingezeichnet und besitzt zwei von Null verschiedene Komponenten.

Virtuelle Verschiebung:

Das Differenzial der virtuellen Verschiebung erhalten wir auf gleiche Weise, allerdings müssen wir berücksichtigen, dass virtuelle Verschiebungen *zeitlos* sind und damit unendlich schnell ablaufen ($\delta t = 0$). In unserem Beispiel „frieren“ wir die Vertikalbewegung des Fahrstuhls einfach ein und überlegen uns, wie sich der Massenpunkt mit den Zwangsbedingungen des eingefrorenen Systems verträglich dann noch verschieben kann. Offensichtlich kann der Massenpunkt dann nur eine Bewegung nach rechts oder links ausführen. Diese Verschiebung ist die *virtuelle Verschiebung*.
Mathematisch berechnen wir die virtuelle Verschiebung aus dem in Gleichung (1) gegebenen Ortsvektor wie folgt:

$$\begin{aligned} \delta\vec{r}\,(t) &= \delta x\,(t)\,\vec{e}_x + \delta y\,(t)\,\vec{e}_y \qquad (3) \\ &= \delta x\,(t)\,\vec{e}_x + v_0 \delta t\,\vec{e}_y \\ &= \delta x\,(t)\,\vec{e}_x. \qquad (4) \end{aligned}$$

Die virtuelle Verschiebung ist im oberen Bild rechterhand eingezeichnet. Der Unterschied zwischen der reellen und der virtuellen Verschiebung macht gleichermaßen den Unterschied zwischen der reellen Arbeit dA und der virtuellen Arbeit δA einer Kraft aus. Als Beispiel berechnen wir die Arbeit, die die Normalkraft (zwischen Fahrstuhl und Massenpunkt) an der Verschiebung des Massenpunktes verrichtet.

Reelle Arbeit:

$$dA = \vec{N} \cdot d\vec{r} = N\vec{e}_y \cdot (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y) = Ndy = Nv_0dt \tag{5}$$

Häufig wird in der Literatur die Aussage getätigt, dass Zwangskräfte keine Arbeit verrichten. Unser Beipiel unterstreicht, dass diese Aussage nicht immer korrekt ist. Die Normalkraft in unserem Beispiel ist eine Zwangskraft und diese verrichtet sehr wohl Arbeit! Man sagt „*Zwangskräfte verrichten Arbeit an der Führungsbewegung!*“. Die geführte Bewegung der Masse kommt in unserem Beispiel durch den Fahrstuhl zustande, der eine Aufwärtsbewegung vollzieht und hierdurch den Massenpunkt mitführt.

Virtuelle Arbeit:

Die Arbeit, die die Normalkraft an der virtuellen Verrückung des Massenpunktes verrichtet, ist hingegen tatsächlich gleich Null:

$$\delta A = \vec{N} \cdot \delta\vec{r} = N\vec{e}_y \cdot \delta x\vec{e}_x = 0. \tag{6}$$

Genau diesen Umstand nutzt man bei den Energieprinzipien aus. Deshalb baut das gesamte Prinzip auf *gedachte (virtuelle)* und nicht auf reelle Verschiebungen auf. Dies ermöglicht zum Beispiel die Herleitung der Lagrange-Gleichungen 2. Art und ist zugleich Grundlage des Prinzips von D'Alembert in Lagrangescher Fassung.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen (Arbeit) wird zur Untersuchung der Statik von Starrkörpersystemen verwendet. Es lautet:

> *Ein mechanisches Starrkörpersystem ist dann im Gleichgewicht, wenn die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte und Momente verschwindet.*

$$\boxed{\delta A = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{j=1}^{k} \vec{M}_j \cdot \delta\vec{\varphi}_j = 0} \tag{7}$$

n gibt darin die Anzahl der angreifenden Kräfte und k die Anzahl der angreifenden Momente an. $\delta\vec{r}_i$ sind die virtuellen Verrückungen der Kraftangriffspunkte und $\delta\vec{\varphi}_j$ die vektoriellen, virtuellen Winkelverdrehungen.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen wird im Wesentlichen für folgende Aufgabenstellungen genutzt:

1. Berechnung von Gleichgewichtslagen bzw. von Kraftgrößen, die das Gleichgewicht ermöglichen.
2. Berechnung von Reaktionskräften (auch Schnittlasten) innerhalb statisch bestimmt gelagerter Systeme.

Bei der Berechnung von Reaktionskräften (und Schnittlasten) muss die zur gesuchten Kraft gehörige Bindung zunächst aufgebrochen werden und als Ersatz für die Bindung die gesuchte Reaktionskraft angetragen werden. Hierdurch entsteht ein Ersatzsystem mit einem Freiheitsgrad, in dem die Reaktionskraft als eingeprägte Kraft zur Geltung kommt.

Bei der Berechnung der virtuellen Verschiebungen der Kraftangriffspunkte kann man auf zwei verschiedene Arten vorgehen:

1. Man skizziert das System (bzw. Ersatzsystem) in der ursprünglichen und in einer ihr infinitesimal benachbarten Lage. Die verschobene Lage muss dabei selbstverständlich mit den geometrischen Zwängen des Systems (bzw. Ersatzsystems) vereinbar sein. Die zu jeder Kraft zugehörigen Verrückungen liest man dann aus der Geometrie vorzeichenrichtig ab.

2. Man stellt die Ortsvektoren zu den Kraftangriffspunkten in einer endlich verschobenen Lage des Systems (bzw. Ersatzsystems) auf und bildet im Anschluss deren Variation (um die Gleichgewichtslage) gemäß

$$\delta\, \vec{r}\,(q_i)\big|_{q_{i,Gl}} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right|_{q_{1,Gl}} \delta q_1 + \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right|_{q_{2,Gl}} \delta q_2 + \ldots + \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_f}\right|_{q_{f,Gl}} \delta q_f, \tag{8}$$

   wobei f die Anzahl der Freiheitsgrade angibt. Will man nur eine Reaktionskraft eines statisch bestimmten Systems ermitteln, so wird das Ersatzsystem auch nur einen Freiheitsgrad haben. Zur gleichzeitigen Berechnung verschiedener Reaktionskräfte würde das Ersatzsystem mehrere Freiheitsgrade beinhalten. Die Unabhängigkeit der generalisierten Koordinaten stellt die gleichzeitige Bestimmung dieser Reaktionskräfte sicher.

Allgemeines Lösungskonzept

1. Zur Berechnung von Reaktionskräften muss das System zunächst geeignet beweglich gemacht werden und um die Reaktionskraft als eingeprägte Kraft des Ersatzsystems ergänzt werden.
2. System (bzw. Ersatzsystem) geometrisch verträglich verrücken.
3. Eingeprägte Kräfte und Momente sowie Ortsvektoren zu den Angriffspunkten der eingeprägten Kräfte vektoriell aufstellen.
4. Ortsvektoren zu den Angriffspunkten der eingeprägten Kräfte gemäß Gleichung (8) um die Gleichgewichtslage variieren.
5. Einsetzen der eingeprägten Kraftgrößen und der virtuellen Verrückungen in das Prinzip der virtuellen Arbeit nach Gleichung (7).
6. Ausklammern nach den virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten, woraus aufgrund deren Unabhängigkeit die Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Unbekannten abfallen.

Bemerkungen / Vorteile des Verfahrens

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen eignet sich besonders gut zur Lösung von Gleichgewichtsaufgaben eines Systems mehrerer gekoppelter Starrkörper. Dabei können gezielte Reaktionskräfte bestimmt werden, ohne die Gleichgewichtsbedingungen für jeden einzelnen Körper aufstellen zu müssen. Zur Lösung von Gleichgewichtsaufgaben einzelner Starrkörper ergibt sich gegenüber der Auswertung von Gleichgewichtsbedingungen allerdings kaum ein Vorteil.