Prüfungsklausur: Energiemethoden der Mechanik — WS 2015/2016

Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

Dieser Kasten ist vor der Bearbeitung der Klausur **vollständig** und **lesbar** auszufüllen!

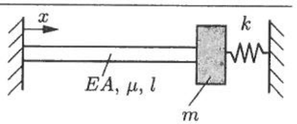
Nachname	Mustermann	Vorname	Max
Studiengang		Matrikelnummer	

Aufgabe	1	2	3	4	Σ 1 - 4	5 (Theorie)	KorrektorIn
Erreichte Punktzahl					/ 40	/ 10	

Die Klausur besteht aus 4 Rechenaufgaben und einem Kurzfragenteil (Aufgabe 5). Sie gilt als bestanden, wenn mindestens 5 von 10 Punkten im Kurzfragenteil **und** in der Summe mindestens 20 von 50 Punkten erreicht werden. Bitte tragen Sie die Ergebnisse des **Kurzfragenteils direkt auf dem Klausurblatt** ein (**nur diese Eintragungen werden berücksichtigt!**). Unlesbare Lösungen werden **nicht** beachtet; - schreiben Sie daher bitte leserlich!

1 Bekannte Aufgabe — 1+2+1+4=8 Punkte

Ein massebehafteter elastischer Stab (Dehnsteifigkeit EA, Massebelegung μ, Länge l) ist am linken Rand ($x = 0$) fest eingespannt und trägt am rechten Rand ($x = l$) eine Punktmasse m. Die Punktmasse ist außerdem über eine Feder (Steifigkeit k) an die Umgebung gekoppelt.



Die Feder sei entspannt, wenn der Stab unverformt ist. Es werden ausschließlich Längsschwingungen $u(x,t)$ betrachtet.

(a) Wie lautet die **geometrische** Randbedingung für das System?

(b) Wie berechnen sich die kinetische Energie K und die potentielle Energie U für das Gesamtsystem?

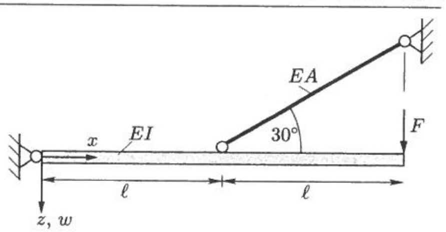
(c) Formulieren Sie das Prinzip der kleinsten Wirkung für das skizzierte System.

(d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die **dynamische** Randbedingung her.

Geg.: m, k, l, $EA =$ konst., $\mu =$ konst.

2 Satz von Castigliano — 8 Punkte

Ein Balken (Länge $2l$, Biegesteifigkeit EI) ist durch ein Festlager und einen Stab (Dehnsteifigkeit EA) statisch bestimmt gestützt. Am Ende des Balkens greift eine vertikale Einzelkraft F an. Linear elastisches Materialverhalten sei vorausgesetzt.



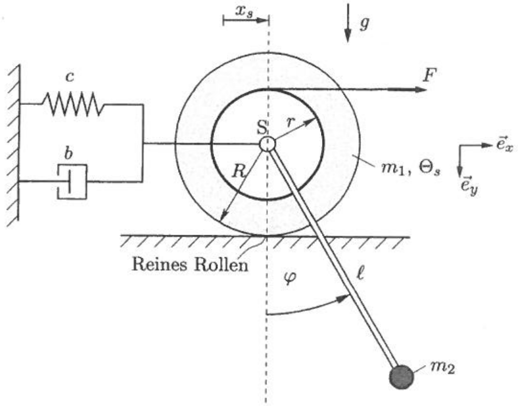
Ermitteln Sie die vertikale Verschiebung des Kraftangriffspunktes $w\,(x = 2\ell)$ mit Hilfe des 2. Satzes von CASTIGLIANO.

Hinweis: Berücksichtigen Sie bei der Berechnung der komplementären Formänderungsenergie nur die Beiträge aufgrund der Biegung des Balkens und der Dehnung des Stabes.

Geg.: ℓ, EI, EA, F

3 Lagrange-Gleichungen 2. Art — 7+3+3=13 Punkte

Am Innenrand eines gestuften Rades (Masse m_1, Massenträgheitsmoment Θ_s) ist ein Seil aufgewickelt, an dessen Ende eine konstante Kraft F in horizontale Richtung angreift. Der Schwerpunkt des *rein rollenden* Rades ist durch eine Feder der Steifigkeit c und einen Dämpfer mit der Dämpfungskonstanten b mit der Umgebung verbunden. Außerdem ist ein *masseloser* Stab im Schwerpunkt gelenkig angeschlossen, der an seinem Ende eine Punktmasse m_2 trägt. Die Feder sei bei $x_s = 0$ entspannt.



(a) Stellen Sie die LAGRANGE-Funktion L des Systems auf. Nutzen Sie als generalisierte Koordinaten x_s und φ.

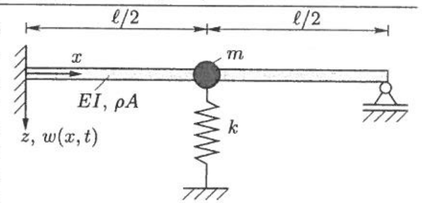
(b) Wie lautet die Dissipationsfunktion D des Systems und welche (virtuelle) Arbeit δA verrichtet die Kraft F an den virtuellen Änderungen der generalisierten Koordinaten?

(c) Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen des Systems mit Hilfe der LAGRANGE-Gleichungen 2. Art auf.

Geg.: ℓ, r, R, c, b, g, m_1, m_2, Θ_s, F

4 Verfahren von Rayleigh-Ritz — 2+6+3=11 Punkte

An dem gezeigten, massebehafteten Balken ist in der Mitte eine Punktmasse m befestigt, die über eine Feder der Steifigkeit k mit der Umgebung verbunden ist. Aufgrund einer einmaligen Anregung führt das System Vertikalschwingungen aus. Die Feder sei in der undeformierten Lage des Balkens entspannt. Ermitteln Sie eine Näherung für die erste Eigenkreisfrequenz des Systems mit Hilfe des Verfahrens von RAYLEIGH und RITZ. Nutzen Sie dazu den kubischen Polynomansatz



$$w(x,t) = \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) q(t)$$

und gehen Sie in den folgenden Schritten vor:

(a) Passen Sie den gegebenen Ansatz an die geometrischen Randbedingungen des Systems an.

(b) Ermitteln Sie die kinetische und die potenzielle Energie für das Gesamtsystem.

(c) Nutzen Sie die LAGRANGE-Gleichungen 2. Art zur Berechnung der ersten Eigenkreisfrequenz des Systems.

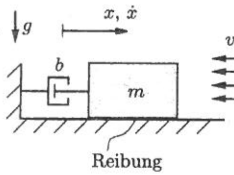
Geg.: ℓ, k, m, ρA, EI

5 Kurzfragen — 10 Punkte

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten kg, m und s an bzw. kennzeichnen Sie dimensionslose Größen mit „1“:

LAGRANGE-Funktion L	
Dissipationsfunktion D	

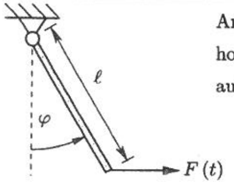
1 Punkt

2. 

Das skizzierte System zeigt einen Klotz, der sich gegen den Wind mit $\dot{x}$ nach rechts bewegt. Der Klotz ist über einen linearen Dämpfer (Dämpfungskonstante b) mit der Umgebung verbunden und zwischen dem Klotz und der Unterlage besteht Reibung (Reibungskoeffizient μ). Die konstante Windgeschwindigkeit sei v_w, der Luftwiderstandsbeiwert k. Wie lautet die Dissipationsfunktion für den Fall, dass sich der Körper nach rechts bewegt?

$D=$

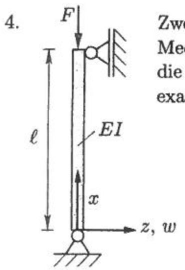
Geg.: μ, b, m, g, v_w, k **2 Punkte**

3. 

Am Ende eines gelenkig aufgehängten Stabes der Länge ℓ greift eine horizontale Einzelkraft $F(t)$ an. Bestimmen Sie die generalisierte Kraft Q_φ aufgrund der Einzelkraft $F(t)$.

$Q_\varphi=$

Geg.: ℓ, $F(t)$ **1 Punkt**

4. 

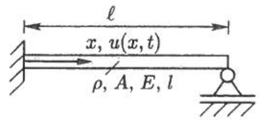
Zwei TeilnehmerInnen A und B an der Veranstaltung „Energiemethoden der Mechanik“ haben mit dem Verfahren von RAYLEIGH-RITZ eine Näherungslösung für die kritische Last des gezeigten Systems bestimmt. Welche Lösung liegt näher an der exakten Lösung? Bitte ankreuzen!

☐ $F_{k,A} = 10\frac{EI}{\ell^2}$ ☐ $F_{k,B} = 4\pi\frac{EI}{\ell^2}$

Geg.: EI, ℓ

1 Punkt

5. Der dargestellte Stab führt infolge einer einmaligen Anregung Longitudinalschwingungen aus. Welche Ritz-Ansätze erfüllen die geometrischen Randbedingungen? Bitte ankreuzen!

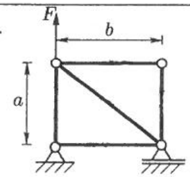


☐ $u(x,t) = (x^2 + 2x)\, q(t)$

☐ $u(x,t) = \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)\right) q(t)$

☐ $u(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) q(t)$

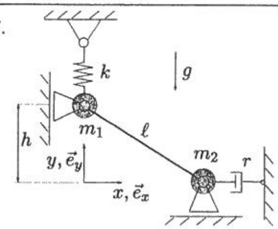
1 Punkt

6. 

Das skizzierte, ideale Stabwerk wird in einem Knoten durch die Einzelkraft F belastet. Berechnen Sie die (komplementäre) Formänderungsenergie des gesamten Stabwerks. Identifizieren Sie dazu vorab alle Nullstäbe. Die Längssteifigkeit der linear elastischen Stäbe ist durch EA gegeben.

$\tilde{W} =$

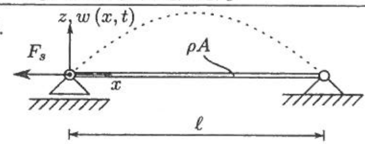
Geg.: a, b, EA, F **1 Punkt**

7. 

Zwei Punktmassen m_1 und m_2 sind mit einer masselosen, starren Stange der Länge ℓ gelenkig verbunden. Die Position der Masse m_1 ist durch y und die Position der Masse m_2 durch x eindeutig gekennzeichnet. Mit Hilfe der LAGRANGE-Gleichungen 1. Art soll die Kraft in der Stange ermittelt werden. Geben Sie die zugehörige Zwangsbedingung in der Form $g(x,y) = 0$ an.

$g(x,y) =$

Geg.: ℓ, h, k, r, m_1, m_2, g **1 Punkt**

8. 

Eine (dehnstarre) Saite der Länge ℓ wird mit der Horizontalkraft F_s vorgespannt und trägt die Masse pro Länge ρA. Geben Sie eine (integrale) Formel zur Berechnung der Formänderungsenergie (potenzielle Energie) der Saite an.

$W =$

Geg.: ℓ, ρA, F_s **1 Punkt**

9. Gegeben ist die potenzielle Energie eines mechanischen Systems mit einem Freiheitsgrad durch

$$U = mgl\sin(2\varphi)\,.$$

Die Gleichgewichtslagen im Bereich $0 \leq \varphi < 2\pi$ wurden bereits ermittelt und sind unten gegeben. Bitte kreuzen Sie an, welche der Gleichgewichtslagen stabil bzw. instabil ist!

Gleichgewichtslage 1: $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ ☐ stabil ☐ instabil

Gleichgewichtslage 2: $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$ ☐ stabil ☐ instabil

Geg.: m, g, ℓ **1 Punkt**