Auf den folgenden Seiten ist der Aufgabenkatalog für die Veranstaltung Energiemethoden der Mechanik abgedruckt, aus dem jede zweite Woche Aufgaben für die Große Übung, die Tutorien und das eigenständige Arbeiten ausgewählt werden. Lösungen zu den Tutoriums- und Hausaufgaben werden ungefähr eine Woche nach Bearbeitung veröffentlicht. Leider schleichen sich manchmal in die veröffentlichten Lösungen Fehler ein. Wir bemühen uns, diese möglichst zügig zu beseitigen. Jeder Student ist aber in erster Linie selbst verantwortlich. Darum selbständig rechnen! Wer gerne noch mehr Aufgaben (mit Musterlösungen) rechnen möchte, sei auf die breite Auswahl an Aufgabenbüchern verwiesen.

Inhaltsverzeichnis

1 Prinzip der virtuellen Verrückungen

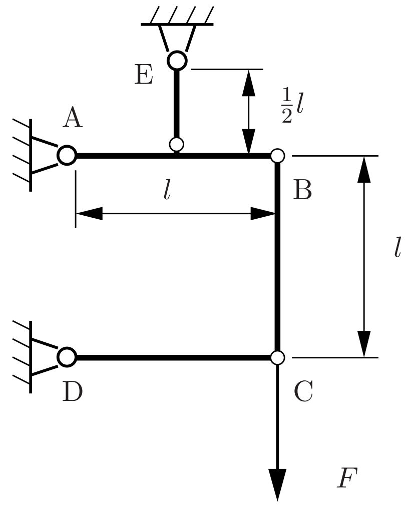
1. Die abgebildete Konstruktion besteht aus drei starren Balken (AB, BC und CD) und einer Stütze, die in der Mitte des Balkens AB angebracht ist.

   Zur Dimensionierung der Stütze soll die Kraft in der Stütze bestimmt werden.

   Führen Sie die Berechnungen auf zwei verschiedenen Wegen durch:

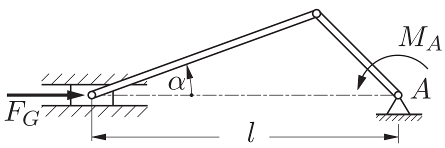
   (a) Schneiden Sie frei und berechnen Sie die gesuchte Kraft mittels Kräfte- und Momentengleichgewichten.

   (b) Nutzen Sie das Prinzip der virtuellen Verückungen zur Bestimmung der gesuchten Kraft.



   Geg.: F, l

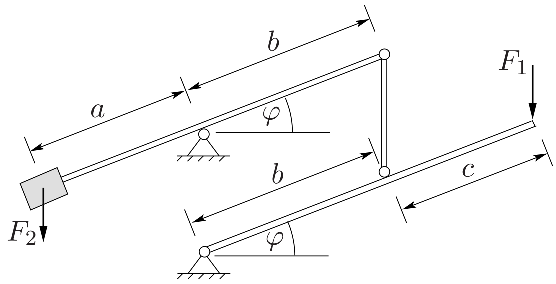
2. Bei einem Kolbenkompressor wirke in der skizzierten Stellung auf die Kolbenfläche die Gaskraft F_G. Wie groß ist das erforderliche Moment M_A, wenn die Reibungskräfte vernachlässigt werden können und statisches Gleichgewicht vorausgesetzt wird?



   Geg.: F_G, l, α

3. Für die skizzierte Klappbrücke soll unabhängig vom Winkel φ Gleichgewicht herrschen. Ermitteln Sie die Kraft F_2 mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen.

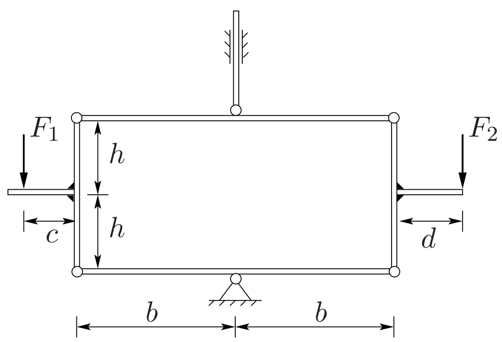
   Geg.: a, b, c, F_1



4. Die skizzierte Robervalsche Waage befindet sich in der gezeigten Lage im statischen Gleichgewicht.

   (a) Ermitteln Sie die Kraft F_2 mit Hilfe von Kenntnissen aus der Technischen Mechanik I.

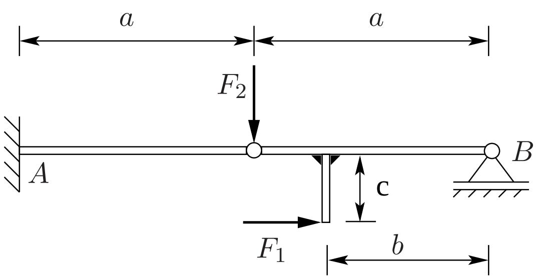
   (b) Bestimmen Sie nun nocheinmal F_2 mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit.



   Geg.: b, c, d, h, F_1

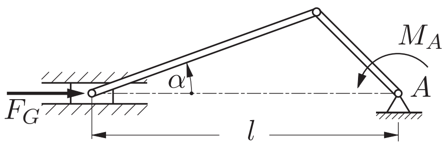
5. Das skizzierte System starrer Körper besteht aus einem geraden Balken und einem verzweigten Träger. Die Kraft F_2 greift direkt an dem die beiden Systemteile verbindenden Gelenk an. Ermitteln Sie das Einspannmoment M_A mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit!

   Geg.: a, b, c, F_1, F_2



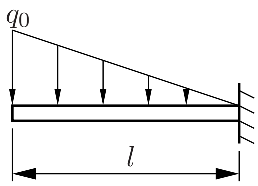
6. Bei einem Kolbenkompressor wirke in der skizzierten Stellung auf die Kolbenfläche die Gaskraft F_G. Auf die rechte Stange wirkt das Antriebsmoment M_A. Bestimmen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen die Gleichgewichtslage (Winkel α), wenn die Reibungskräfte vernachlässigt werden.

   Geg.: F_G, l, M_A



7. Bestimmen Sie mit der Methode der virtuellen Verrückungen für folgenden Kragbalken die Lagerreaktionen.

   Geg.: q_0, l

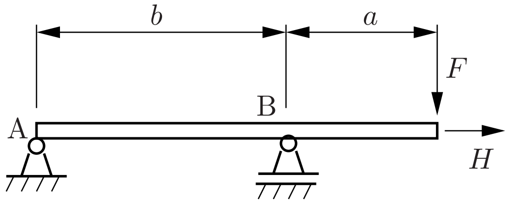


8. Bestimmen Sie für das skizzierte System mit Hilfe der Methode der virtuellen Arbeit / Leistung / Verrückungen

   (a) die Lagerkraft im Punkt B

   (b) alle Schnittlasten.

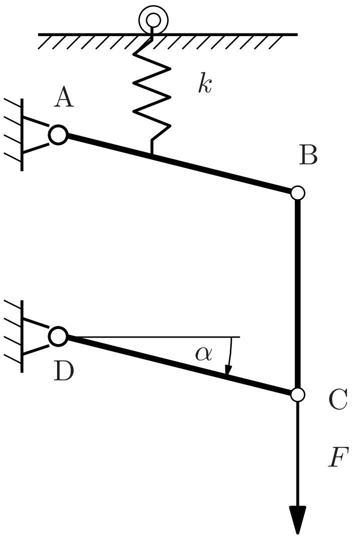
   Geg.: F, H, a, b



9. Ein Gelenkviereck besteht aus drei starren Balken der Länge l. In der Mitte des Balkens AB ist eine Feder der Steifigkeit k angebracht. Die Feder ist stets senkrecht und sei entspannt, wenn $\alpha = 0$ (horizontale Lage der Balken AB und CD).

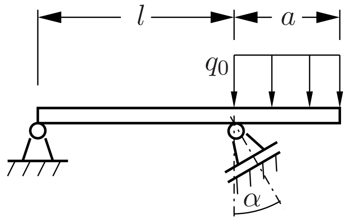
   Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage (Winkel α_G).

   Geg.: F, l, α



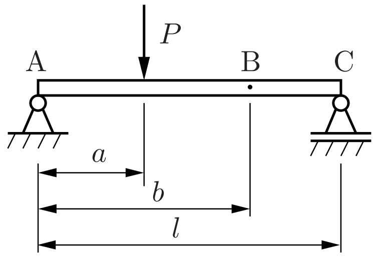
10. Bestimmen Sie mit dem *Prinzip der virtuellen Arbeit* für den skizzierten Balken die Lagerreaktionen.

    Geg.: q_0, l, a, α



11. Für den durch eine Einzelkraft P belasteten skizzierten Balken ist die Lagerkraft im Punkt C sowie das Schnittmoment im Punkt B mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen zu bestimmen.

    Geg.: P, l, a, b

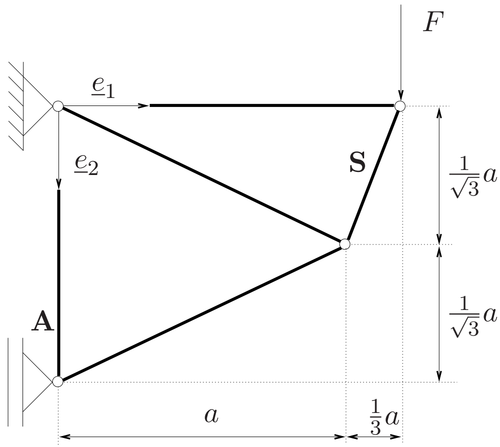


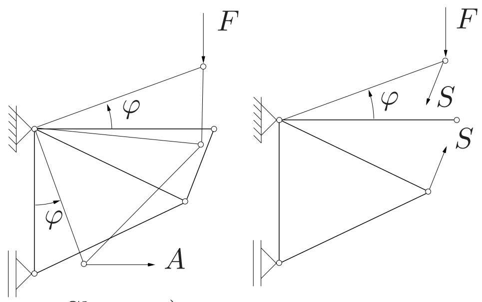
12. Das abgebildete Fachwerk aus starren Stäben wird mit der Kraft F belastet.

    (a) Berechnen Sie mit den Basisvektoren $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_2$ sowie mit Skizze *a*) die Ortsvektoren $\underline{r}_A$ und $\underline{r}_F$ zu den Angriffspunkten der Kräfte A und F. Berechnen Sie die Variationen $\delta\underline{r}_A$ und $\delta\underline{r}_F$. Berechnen Sie die Lagerkraft A mithilfe des PdvV.

    (b) Notieren Sie mit Skizze *b*) den Ortsvektor $\underline{r}_F = \underline{r}_S$ zum gemeinsamen Angriffspunkt der Kräfte F und S. Berechnen Sie die Variationen $\delta\underline{r}_F$ und $\delta\underline{r}_S$. Berechnen Sie die Stabkraft S mithilfe des PdvV, indem Sie S als äußere Last ansehen.

    Hinweis:
    $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = 30°$
    $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
    $\sin 30° = \frac{1}{2}$





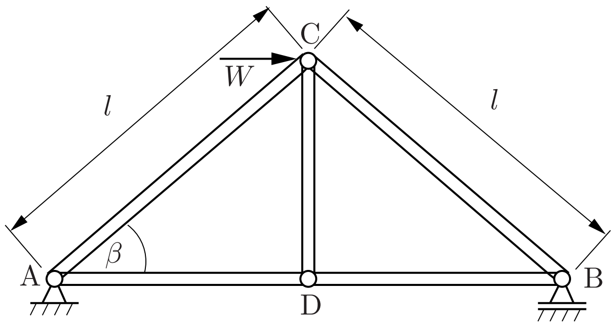
Skizze *a*) Skizze *b*)

13. Für das aus starren Stäben bestehende skizzierte Fachwerk unter der Belastung W sind folgende Größen mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen zu bestimmen:

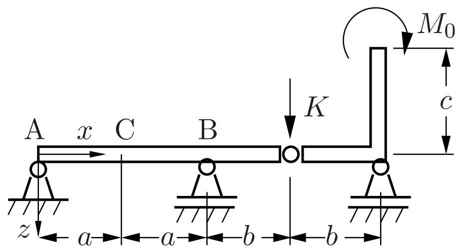
    (a) Die Auflagerkraft im Punkt B,

    (b) die Stabkraft S_{BC}.

    Geg.: W, l, β



14. Das skizzierte Balkensystem ist durch ein Einzelmoment M_0 und eine Einzelkraft K belastet. Alle Balken sind starr und masselos.

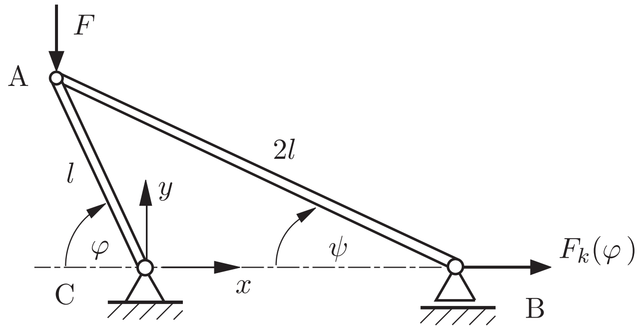


(a) Berechnen Sie mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen das Schnittmoment M an der Stelle C ($x = a$).

(b) Bestimmen Sie ebenfalls mit Hilfe des Prinzip der virtuellen Verrückungen die Lagerkraft in B.

Geg.: a, b, c, K, M_0

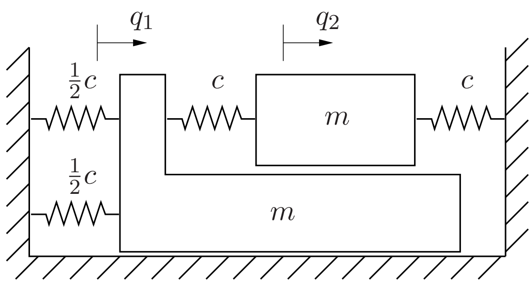
15. Die abgebildete Konstruktion aus starren Stäben wird mit der Kraft F belastet und befindet sich im statischen Gleichgewicht. Berechnen Sie mit dem *Prinzip der virtuellen Arbeit* die Haltekraft F_k als Funktion des Winkels φ.



Geg.: F, l

2 Lagrangesche Gleichungen

16. Für eine überschlägige Dimensionierung einer Werkzeugmaschine sind die Eigenfrequenzen des abgebildeten Ersatzsystems von Interesse, für deren Berechnung die Bewegungsdifferenzialgleichungen benötigt werden. Bei der Untersuchung des schwingungsfähigen Systems soll die Reibung vernachlässigt werden. Für $q_1 = q_2 = 0$ sind alle Federn entspannt.



Sie werden damit beauftragt, die Bewegungsdiffrenzialgleichungen zu ermitteln. Dazu sind folgende Aufgabenteile zu bearbeiten:

(a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

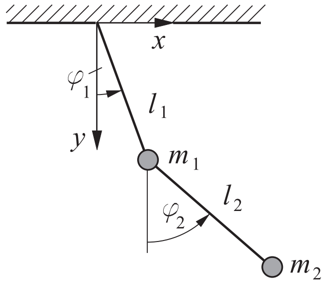
(b) Stellen Sie die kinetische Energie K und potentielle Energie U des Systems auf.

(c) Bestimmen Sie nun die Lagrangefunktion L.

(d) Wie lauten die Bewegungsdifferentialgleichungen?

Geg.: m, c

17. Zwei masselose Stangen (Längen l_1 und l_2) und zwei Punktmassen m_1 und m_2 bilden ein Doppelpendel.

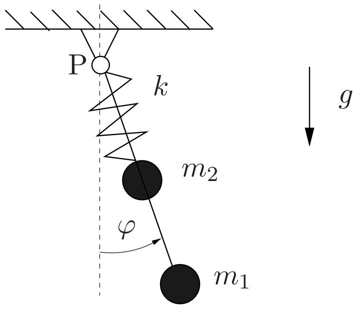


(a) Bestimme für die Bewegung des skizzierten Doppelpendels in einer vertikalen Ebene (Erdbeschleunigung g) mit Hilfe der LAGRANGEschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichungen. Nutze die generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2.

(b) Wie lauten die Gleichgewichtslagen?

Geg.: m_1, m_2, l_1, l_2, g

18. Eine masselose starre Stange ist am Punkt P aufgehängt. Im Abstand l ist eine Punktmasse m_1 befestigt. Auf der Stange gleitet außerdem eine zweite Punktmasse m_2 reibungslos unter der Wirkung der Federkraft und der Erdanziehungskraft auf und ab. Der Abstand der zweiten Punktmasse vom Aufhängungspunkt P sei mit $r(t)$ bezeichnet. Die Feder hat die Federsteifigkeit k und die unverformte Länge l_0.



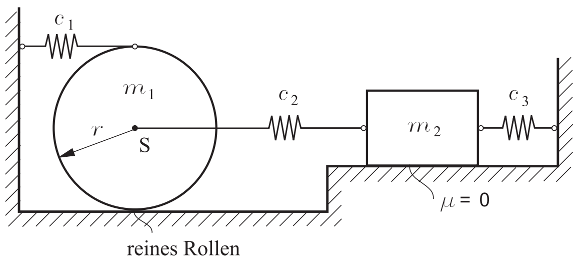
(a) Wie lauten die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System in den generalisierten Koordinaten $r(t)$ und $\varphi(t)$?

(b) Prüfe durch Betrachtung von *Grenzfällen* die Plausibilität der hergeleiteten Differentialgleichungen.

19.

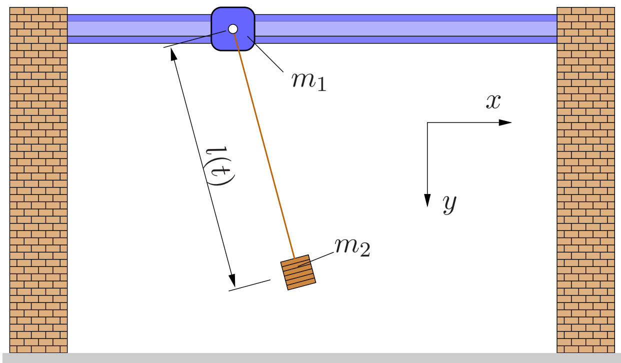
(a) Für das skizzierte System stelle man das Bewegungsdifferentialgleichungssystem auf und schreibe es auf Matrizenform um. Es sollen von vornherein kleine Auslenkungen angenommen werden.

(b) Man berechne die Eigenkreisfrequenzen und die dazugehörigen Eigenformen des Systems.



Geg.: $c_1 = \frac{1}{4}c$, $c_2 = c_3 = c$, $m_1 = \frac{2}{3}m$, $m_2 = m$, $\Theta_S = \frac{1}{2}m_1 r^2$, r

20.

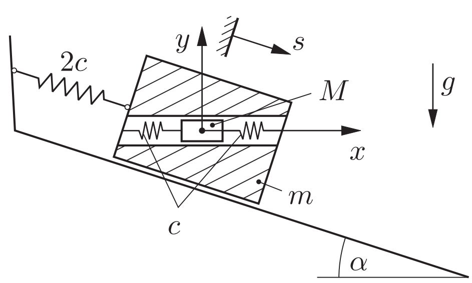


Die Aufhängevorrichtung eines ebenen Pendels mit der zeitlich veränderlichen Länge $l(t)$ und der Pendelmasse m_2 gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen Führung und hat die Masse m_1.

Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System.

Geg.: m_1, m_2, $l(t)$, g

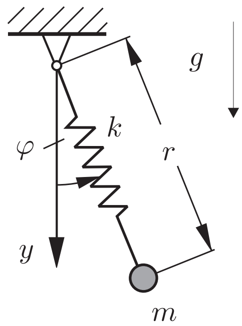
21. Auf einer schiefen Ebene bewegt sich reibungsfrei ein Körper der Masse m, Bewegungskoordinate s, infolge der Schwerkraft abwärts. In einer radialen Bohrung ist ein Zylinder der Masse M, der Relativkoordinate x, elastisch angeordnet, der sich ebenfalls reibungsfrei bewegen kann. Ausgehend von der Ruhelage des Systems sind mit den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsdifferentialgleichungen für die generalisierten Koordinaten s und x aufzustellen.



Geg.: m, M, c, α, g

22. Ein Massenpunkt m ist am unteren Ende einer Feder k angebracht. Am oberen Ende ist die Feder drehbar gelagert. In spannungloser Ruhelage hat die Feder die Länge r_0.

Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen des Systems mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2.Art auf.

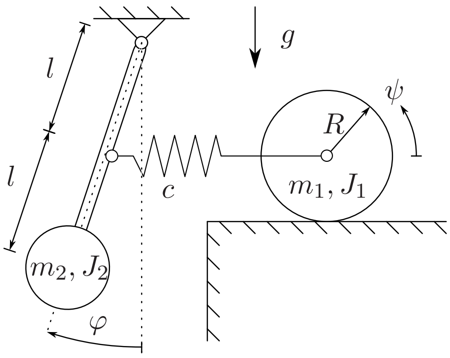


Geg.: k, m, r_0, g

23. Das skizzierte System schwingt mit kleinen Auslenkungen. Die Feder und der Pendelstab sind masselos. In der Ruhelage $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ ist die Feder entspannt.

   (a) Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen für das skizzierte System mit Hilfe der Lagrangegleichungen 2. Art auf.

   (b) Stellen Sie das linearisierte Differentialgleichungssystem in Matrizenform dar.

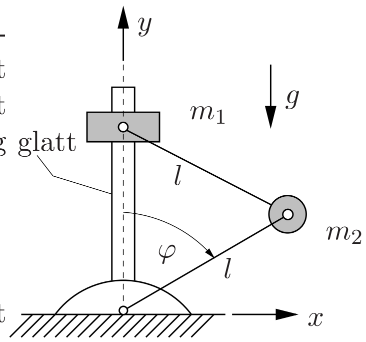


Geg.: m_1, m_2, J_1, J_2, l, r, c, g

24. Ein starrer Körper (Masse m_1) gleitet reibungsfrei in vertikaler Richtung und ist über eine masselose Stange (Länge l) mit einer Punktmasse m_2 gelenkig verbunden. Die Punktmasse ist über eine weitere Stange (Länge l) gelenkig an die Umgebung gekoppelt.

   (a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

   (b) Bestimme mit den Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsdifferentialgleichung für das System?

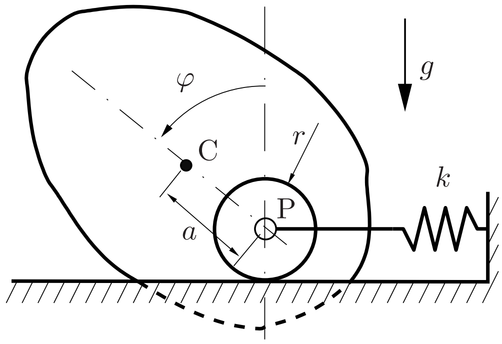


Geg.: l, g, m_1, m_2

25. Ein starrer Körper führt Schwingungen in einer vertikalen Ebene unter dem Einfluß der Schwerkraft aus. Der Zapfen (Radius r) rollt ohne zu gleiten auf der starren Unterlage. Der Zapfenmittelpunkt P wird über eine Feder mit der Steifigkeit k gehalten. Die Reibung des Systems sei vernachlässigbar bis auf ein Rollreibmoment M mit konstantem Betrag.

    Die Lage des Systems ist bestimmt durch den Drehwinkel φ. Bei $\varphi = 0$ sei die Feder entspannt und der Massenmittelpunkt C stehe genau senkrecht über dem Zapfenmittelpunkt P.

    Der Massenmittelpunkt C des Gesamtsystems hat den Abstand a vom Zapfenmittelpunkt P. Der Körper hat die Masse m und das Massenträgheitsmoment J^{C} um den Massenmittelpunkt.

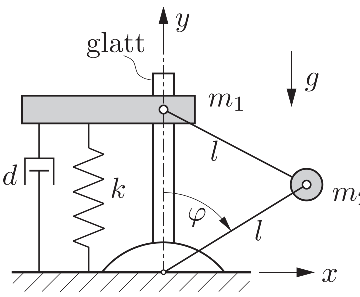


    (a) Bestimmen Sie die LAGRANGE-Gleichung(en) 2. Art (Bewegungsdifferentialgleichung/en) des Systems.

    (b) Leiten Sie nun für den Fall des glatten Rollkontaktes ($M = 0$) aus den/der Bewegungsdifferentialgleichung(en) eine Bestimmungsgleichung für die statische(n) Ruhelage(n) her.

    Geg.: a, r, g, k, M, m, J^{C}

26. Ein starrer Körper (Masse m_1) gleitet reibungsfrei in vertikaler Richtung und ist über eine masselose Stange (Länge l) mit einer Punktmasse m_2 gelenkig verbunden. Der starre Körper ist außerdem über ein lineares Feder-Dämpfer-Element (Federsteifigkeit k, Dämpferkonstante d) an den Boden gekoppelt. Die entspannte Länge der Feder sei $2l$. Die Punktmasse m_2 ist über eine weitere Stange (Länge l) gelenkig an den Boden gekoppelt.



    (a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

    (b) Stellen Sie die kinetische Energie K, die potentielle Energie U und die Dissipationsfunktion D als Funktion von φ und $\dot{\varphi}$ auf. Wie ist die LAGRANGEfunktion L definiert?

    (c) Arbeiten Sie im folgenden mit der LAGRANGEfunktion

$$L = (2m_1 \sin^2\varphi + \frac{1}{2}m_2)l^2\dot{\varphi}^2 - (2m_1 + m_2)gl\cos\varphi - 2kl^2(1-\cos\varphi)^2$$

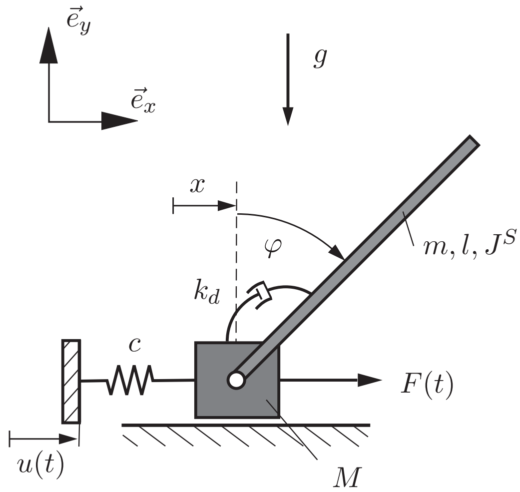
    weiter. Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung für das System.

    (d) Wie groß muß die Federsteifigkeit k sein, damit das System für $\varphi_S = \frac{\pi}{3}$ eine Gleichgewichtslage hat?

    (e) Welche weiteren Gleichgewichtslagen sind im Bereich $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ vorhanden, wenn die Federsteifigkeit k den in Teil (d) bestimmten Wert hat?

    Geg: k, d, m_1, m_2, l, g

27. Das dargestellte System besteht aus einem dünnen, homogenen Stab (Länge l, Masse m, Massenträgheitsmoment J^S) und einem Klotz (Masse M), der reibungsfrei auf der Unterlage gleitet. Er wird bei seiner Bewegung entlang der Unterlage (Koordinate x) durch eine vorgegebene Kraft $F(t)$ in horizontaler Richtung angetrieben und ist andererseits mit einer immer horizontal gerichteten Feder verbunden. Deren linker Fußpunkt wird durch die vorgegebene Auslenkung $u(t)$ bewegt. Für $x = u(t) = 0$ ist die Feder spannungslos. Zwischen Klotz und Stange wirkt ein winkelgeschwindigkeitsproportionaler Drehdämpfer mit der Dämpferkonstante k_d.



(a) Stellen Sie die LAGRANGEfunktion L des Systems bzgl. der generalisierten Koordinaten x und φ auf.

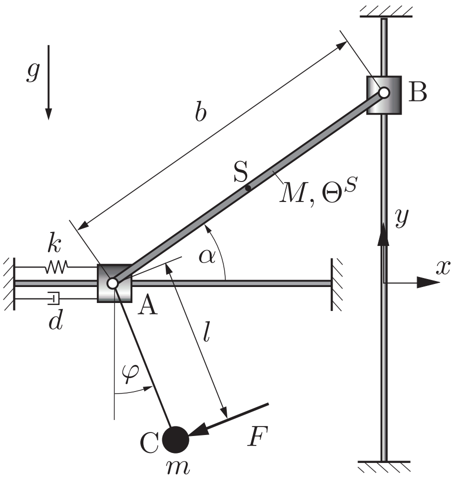
(b) Stellen Sie die Dissipationsfunktion D des Systems auf.

(c) Geben Sie die generalisierten (Rest-)Kräfte Q_x und Q_φ an.

(d) Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System.

Geg.: M, J^S, m, l, c, g, $F(t)$, k_d

28. Ein homogener Balken (Länge b, Masse M) ist in A und B gelenkig mit masselosen Schiebehülsen verbunden, die reibungsfrei auf den beiden Linearführungen gleiten können. Die Schiebehülse A ist durch ein Feder-Dämpfer-Element (Federsteifigkeit k, entspannte Lage bei $\alpha = \alpha_0$, lineare Dämpferkonstante d) an die Umgebung gekoppelt. Zusätzlich ist im Punkt A ein Punktmassependel (Länge l, Masse m) angebracht, an dessen Ende die nichtkonservative Kraft F wirkt. Der Betrag der Kraft F ist konstant, die Wirkungslinie ist stets senkrecht zu der Pendelstange.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion L des Systems bzgl. der generalisierten Koordinaten α und φ auf.

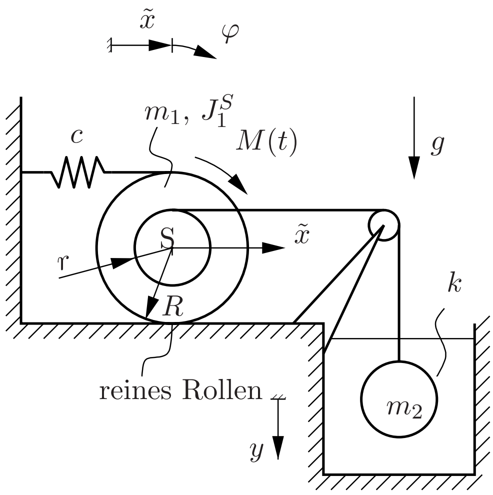
(b) Stellen Sie die Dissipationsfunktion D des Systems auf.

(c) Geben Sie die generalisierten Nicht-Potentialkräfte Q_α und Q_φ an, die nicht durch D modellierbar sind.

(d) Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung für das System ohne Pendel und Kraft F.
Hinweis: Nutzen Sie dazu die bereits durchgeführten Rechnungen.

Geg.: M, b, $\Theta^S = \frac{Mb^2}{12}$, m, l, d, k, g, F, α_0

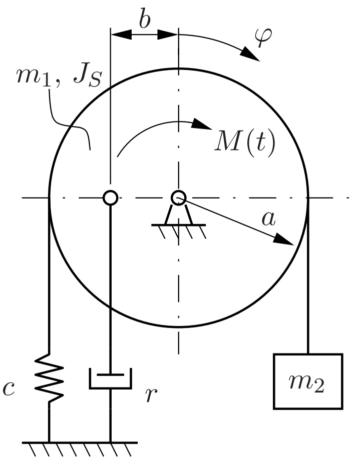
29. Das skizzierte System wird durch das Moment $M(t)$ zum Schwingen angeregt. Der Strömungswiderstand der Kugel ist proportional zur Geschwindigkeit mit dem Widerstandskoeffizienten k. Alle anderen Widerstände, die Masse der Umlenkrolle sowie der hydrostatische Auftrieb der Kugel sollen vernachlässigt werden. Die nicht dehnbaren Seile bleiben immer gespannt. Die Feder ist bei $\tilde{x} = 0$ entspannt.



   (a) Berechnen Sie die statische Ruhelage x_{stat} für den Fall $M(t) = 0$!
   (b) Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung um die statische Ruhelage (in der Variable $x = \tilde{x} - x_{\text{stat}}$).
   (c) Bestimmen sie die Amplitude und den Phasenwinkel der stationären Schwingung!

   Geg.: m_1, m_2, J_1^S, $M(t) = M_0 \cos \Omega t$, M_0, Ω, g, c, k

30. Ein schwach gedämpftes schwingungsfähiges System wird durch $M(t) = M_0 \sin \lambda t$ angeregt. In der skizzierten Stellung ist die Feder gerade spannungsfrei.



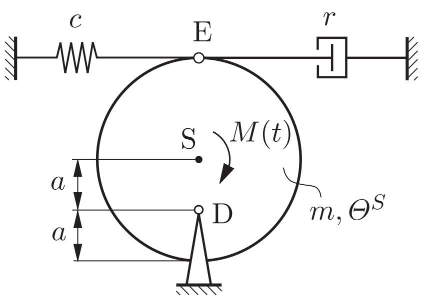
   (a) Bestimme die Bewegungsdifferentialgleichung für kleine Auslenkungen φ!
   (b) Gib die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an und passe diese folgenden Anfangsbedingungen an:

$$\varphi(t=0) = \frac{m_2 g}{ca} \qquad \text{und} \quad \dot{\varphi}(t=0) = 0$$

   (c) Wie groß sind Amplitude und Phasenwinkel im eingeschwungenen Zustand?

   Geg.: a, b, c, r, M_0, λ, m_1, J_S, m_2, g

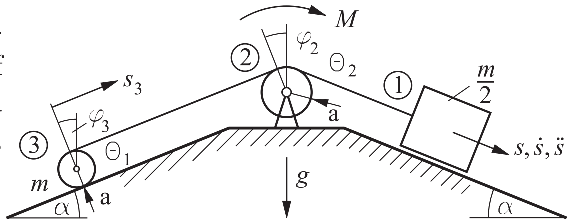
31. Das skizzierte System wird von einem im Massenmittelpunkt S angreifenden Moment angetrieben. Nach einer Einschwingphase stellt sich ein stationärer Zustand mit kleinen Ausschlägen ein. (Gravitation spielt <u>keine</u> Rolle.)



   (a) Bestimmen Sie die lineare Bewegungsdifferentialgleichung!
   (b) Wie groß ist die Kreisfrequenz der <u>freien</u> gedämpften Schwingung?

   Geg.: a, r, c, m, $\Theta^S = 2ma^2$, $M(t) = M_0 \cos \Omega t$

32. Ermittle für das skizzierte System die Beschleunigung der Masse **1**, die reibungsfrei auf der schiefen Ebene gleitet. Die Rolle **2** wird durch ein konstantes Moment M angetrieben, und die Walze **3** rollt ohne zu gleiten.



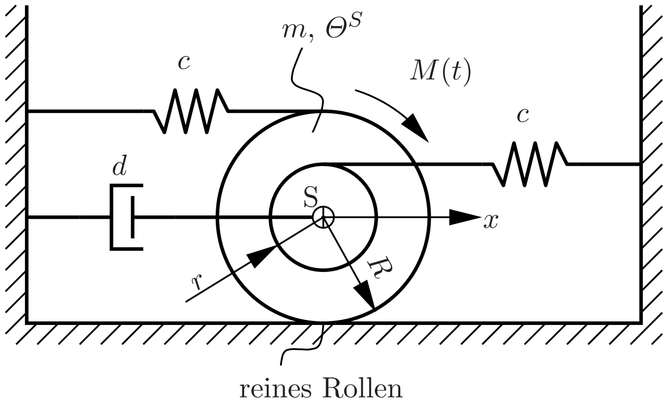
    Geg.: M, m, a, α, Θ_1, Θ_2, g

33. Das skizzierte System wird durch das Moment $M(t)$ zum Schwingen angeregt. In der eingezeichneten Position ($x = 0$) sind beide Federn gespannt. Die obere Feder ist um die Länge l_0 gespannt; die untere Feder ist so gespannt, daß $x = 0$ die Gleichgewichtslage ist. Die Seile seien undehnbar. Es werden ausschließlich kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage betrachtet.

    (a) Stellen Sie die kinetische Energie K und potentielle Energie U für das System auf.

    (b) Bestimmen Sie die Dissipationsfunktion D oder die generalisierte Kraft Q.

    (c) Bestimmen Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung in der Schwerpunktskoordinate x. Um welche Länge muß die untere Feder gespannt sein, damit $x = 0$ die Gleichgewichtslage ist?

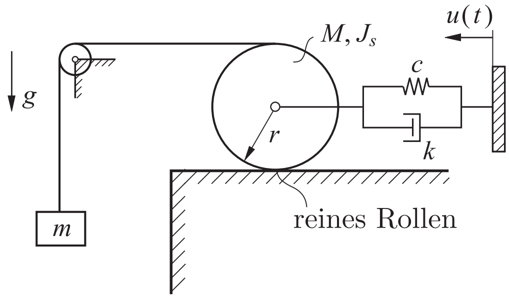


    Geg.: m, Θ^S, $M(t) = M_0 \cos \Omega t$, M_0, Ω, c, d

34. Das skizzierte System (homogene Kreisscheibe M, Θ^S, masselose Umlenkrolle, ideales Seil, Masse m, lineare Feder c, linearer Dämpfer k) erfährt eine Fußpunkterregung $u(t) = \hat{u} \cos \Omega t$.

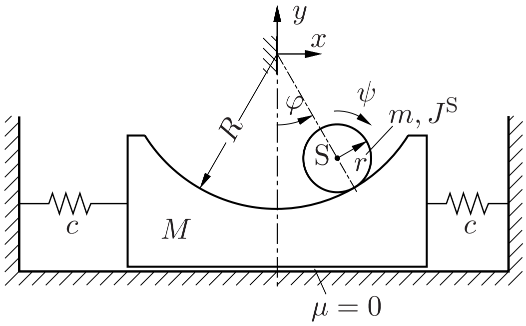
    (a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

    (b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Bewegung des Scheibenschwerpunktes mit Hilfe der LAGRANGEschen Gleichungen 2. Art auf.



    Geg.: M, m, $\Theta^S = \frac{1}{2}Mr^2$, c, k, r, $\hat{u}$, Ω, g

35. Das skizzierte System besteht aus einem Körper der Masse M, der sich auf seiner Unterlage reibungsfrei bewegen kann. Er wird von den beiden Federn (Steifigkeit c) festgehalten. Beide Federn seien in der eingezeichneten Lage entspannt.

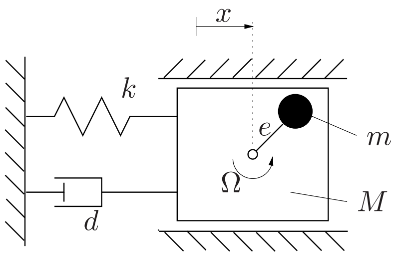


In einer Mulde rollt eine Kugel. Wenn der Grundkörper sich in der Mittelposition befindet ($x = 0$) und die Kugel im tiefsten Punkt der Mulde ist, gilt $\psi = 0$.

Mit Hilfe der LAGRANGEschen Gleichungen 2. Art sind die Bewegungsdifferentialgleichungen für die generalisierten Koordinaten ψ und x aufzustellen.

Geg.: m, M, J^{S}, c, R, r, g

36. Ein starrer Körper (Masse M) gleitet reibungsfrei in einer Führung und ist über ein Feder-Dämpfer-Element (Konstanten k, d) an die Umgebung gekoppelt. Außerdem trägt der starre Körper eine mit der Winkelgeschwindigkeit Ω rotierende masselose Stange, die im Abstand e vom Drehpunkt eine Punktmasse m trägt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Stange horizontal und die Punktmasse rechts vom Drehpunkt. Für $x = 0$ sei die Feder entspannt.



(a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System, wenn die Winkelgeschwindigkeit Ω vorgegeben ist?

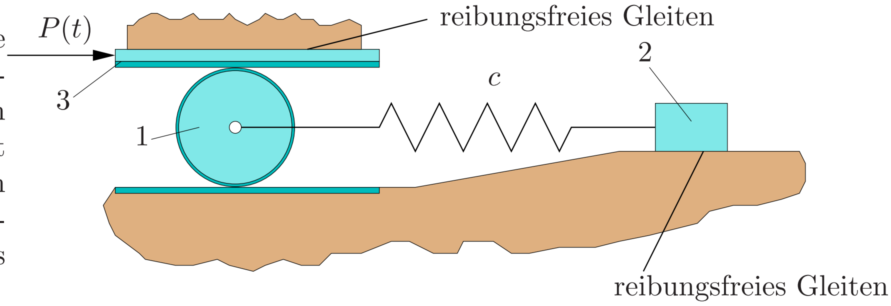
(b) Wie lautet die Bewegungsdifferentialgleichung für das System?

(c) Bestimme die Lösung im eingeschwungenen Zustand.

(d) Wie groß sind die Kräfte im Feder-Dämpfer-Element im eingeschwungenen Zustand?

37. Das skizziere System besteht aus einem Zahnrad 1 (Masse m_1, Radius R), einer Zahnstange 3 und einem Gleitkörper 2 (Masse m_2). Die Masse der Zahnstange soll vernachlässigt werden. Zudem soll für eine erste Untersuchung des Schwingungsverhaltens auf eine Berücksichtigung der Reibung verzichtet werden.

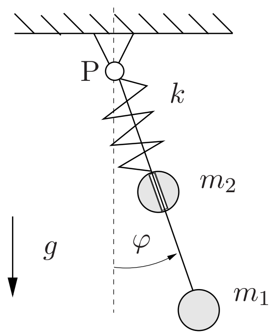
Durch eine periodische Kraft $P(t)$ wird das System zu Schwingungen angeregt. Bestimme mit Hilfe der LAGRANGEschen Gleichungen die Bewegungsgleichungen des Systems!



Geg.: m_1, m_2, R, $P(t)$, c

38. Eine masselose starre Stange ist am Punkt P aufgehängt. Im Abstand $r_1 = l$ ist eine Punktmasse m_1 befestigt. Auf der Stange gleitet außerdem eine zweite Punktmasse m_2 reibungslos. Der Abstand der zweiten Punktmasse vom Aufhängungspunkt P sei mit r_2 bezeichnet. Die Feder hat die Federsteifigkeit k und die unverformte Länge l_0.

    Gesucht sind die Bewegungsdifferentialgleichungen und die Längskraft in der Stange.



    (a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

    (b) Welche generalisierten Koordinaten sind zu wählen? Wie lauten die Zwangsbedingungen?

    (c) Formuliere die kinetische und potentielle Energie in den gewählten Koordinaten.

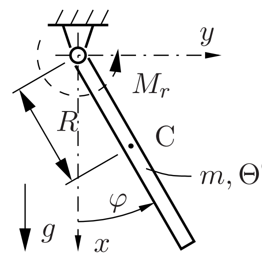
    (d) Wie lauten die Lagrangeschen Gleichungen 1. Art?

    (e) Leite nun die Bewegungsdifferentialgleichungen und die Kraft in der Stange her.

    (f) Wie lauten die Gleichgewichtslagen? Welche Lagerkraft wirkt dann im Lager P?

39. Bei dem skizzierten Pendel tritt am Gelenk ein linear viskoses Reibmoment der Größe $M_r = -r_\varphi \dot{\varphi}$ auf (r_φ: Drehviskosität).

    Stellen Sie für folgende Koordinatensysteme die LAGRANGE-Gleichungen 1. Art auf, werten Sie diese aus, bestimmen Sie die Zwangskraftparameter, werten Sie diese aus und führen Sie eine vergleichende Diskussion durch.

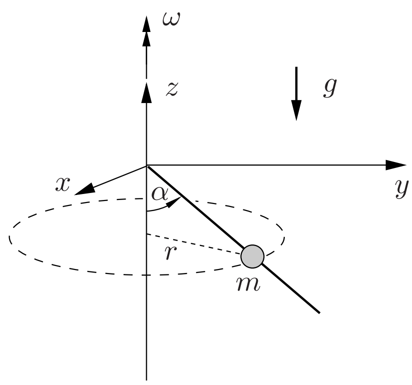


    (a) kartesische Koordinaten (x, y) des Massenmittelpunktes C und Drehwinkel φ

    (b) ebene Polarkoordinaten (r, φ) des Massenmittelpunktes C

    Geg.: m, Θ^{C}, R, g, $M_r = -r_\varphi \dot{\varphi}$

40. An einer vertikalen Achse, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, ist unter dem Winkel α ein gerader Draht befestigt, auf dem eine Perle der Masse m reibungsfrei gleitet.



    (a) Stellen Sie die Lagrangegleichungen 1.Art für die Zylinderkoordinaten r, φ, z auf.

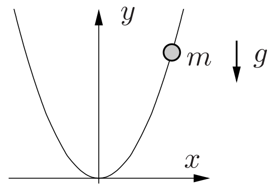
    (b) Lösen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung für $z(t)$ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

    (c) Ermitteln Sie die Zwangskräfte in Abhängigkeit der Zeit.

    (d) Berechnen Sie die Energie der Perle und zeigen Sie, daß der Energiegewinn durch rheonome Zwangsarbeit verursacht wird.

    Geg.: m, g, α, ω

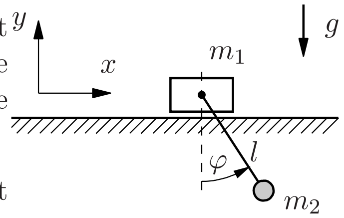
41. Auf einem ruhenden, parabelförmig gebogenen Draht rutscht eine Perle mit Reibung. Die Schwerkraft wirkt in negative y-Richtung.

    Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung auf und berechnen Sie die Zwangskraft mit Hilfe der LAGRANGEgleichungen 1.Art.

    Geg.: m, g, $y(x) = ax^2$, $a = const.$, μ

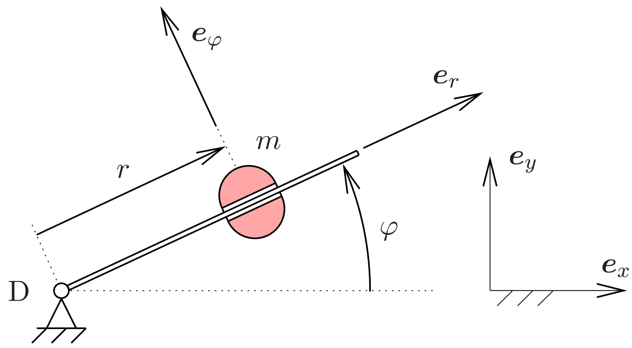
42. Zwischen der Masse m_1 und der horizontalen Ebene besteht Gleitreibung. Der Betrag der Gleitreibungskraft wird über die Zwangskraft des Pendelfadens von der Schwingung der Masse m_2 beeinflußt.

    Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 1.Art sowohl die Normalkraft zwischen m_1 und der Ebene als auch die Bewegungsdifferentialgleichungen des Systems (Die Zwangskraft des Pendelfadens ist nicht gesucht!).

    Geg.: m_1, m_2, l, g, μ

43. Auf einer unendlich langen starren masselosen Stange gleitet reibungsfrei die Punktmasse m. Die Drehung der Stange ist vorgegeben als $\varphi(t) = \omega t$ (Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit). Bestimmen Sie die Kraft der Stange auf die Masse. Benutzen Sie r und φ als generalisierte Koordinaten. Und gehen Sie wie folgt vor:

    (a) Bestimmen Sie den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ mit Ursprung D. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ und $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}$.

    (b) Bestimmen Sie die kinetische Energie K und damit die Lagrange-Funktion $L(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$.

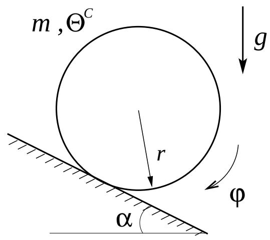
    (c) Geben Sie die (holonome, rheonome) Zwangsbedingung in der Form $f(\varphi, t) = 0$ an. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial r}$ sowie $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$.

    (d) Stellen Sie die Gleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \lambda\frac{\partial f}{\partial q_j} = 0$ auf. Setzen Sie darin die Zwangsbedingung ein. Und geben Sie die beiden resultierenden Dgln. für r und λ an.

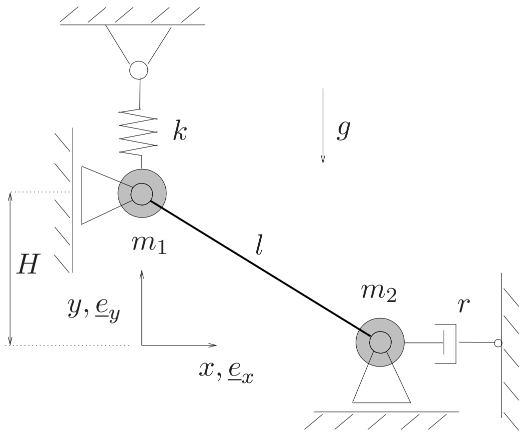
    (e) Geben Sie die generalisierten Zwangskräfte Q_r und Q_φ an. Berechnen Sie daraus die Zwangskraft $\boldsymbol{Z}$ in der Basis $\langle \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi \rangle$, also $\boldsymbol{Z} = Z_r\boldsymbol{e}_r + Z_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$. Kontrollieren Sie die Dimension von $\boldsymbol{Z}$.

    Geg.: m, ω =const.

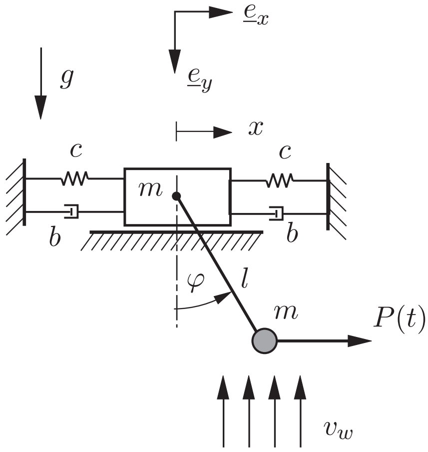
44. Mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen 1. Art berechne man alle Kontaktkräfte und die Bewegungsgleichung des skizzierten Systems.

45. Zwei Massen m_1 und m_2 sind mit einer masselosen Stange gelenkig verbunden. Die Masse m_1 kann sich nur in y–Richtung, und die Masse m_2 kann sich nur in x–Richtung bewegen. Mit den Lagrangeschen Gleichungen 1. Art berechne man die Stangenkraft. Die Feder ist bei $y = H$ spannungslos.



46. Das skizierte System besteht aus einem starren Körper der Masse m, der auf einer Ebene reibungsfrei gleitet und mit zwei Federn und zwei Dämpfern an die Umgebung gebunden ist. Im Körperschwerpunkt ist ein mathematisches Pendel (Länge l, Masse m) angebracht, das von einem Wind der Geschwindigkeit $\underline{v}_w$ von unten angeblasen wird (Luftwiderstandsbeiwert k). Die Pendelmasse wird durch die Kraft $\underline{P}(t) = P_0 \cos \Omega t \underline{e}_x$ erregt. Die Bewegung verläuft im Erdschwerefeld.



(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion L des Systems bzgl. der generalisierten Koordinaten x und φ auf.

(b) Berechnen Sie den Betrag der Relativgeschwindigkeit $|\underline{v}_{rel}|$ zwischen Pendelmasse und Wind.

(c) Stellen Sie die Dissipationsfunktion D des Systems auf.

(d) Geben Sie die generalisierten Nicht-Potentialkräfte Q_x und Q_φ an, die nicht durch D modellierbar sind.

(e) Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichungen für das System.

Hinweis: $\underline{v}_{rel} = \underline{v}_m - \underline{v}_w$; $\underline{v}_m$: Geschw. der Pendelmasse, $\underline{v}_w$ Windgeschwindigkeit

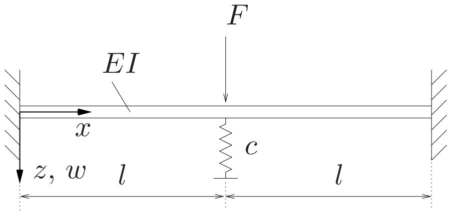
Geg.: m, b, c, k, l, g, v_w, P_0, Ω

3 Verfahren von Ritz

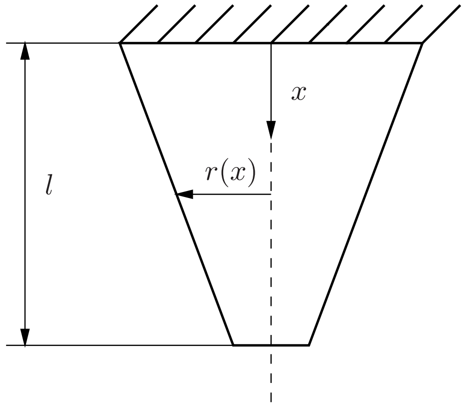
47. Bestimmen Sie für den skizzierten Balken mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens eine Näherungslösung für die Biegelinie $w(x)$. Passen Sie zunächst die Ansatzfunktion den geometrischen Randbedingungen an.

Ansatz: $w(x) = a_0 + a_1 \cos(\frac{\pi x}{l}) + a_2 \sin(\frac{\pi x}{l})$

Geg.: l , EI, c, F



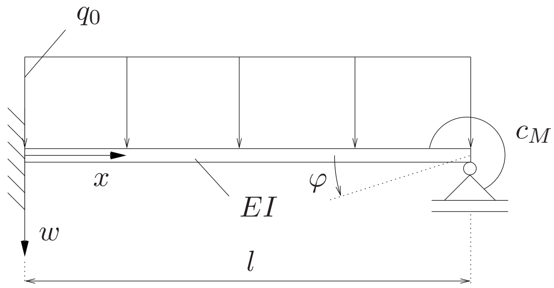
48. Im folgenden soll die Längsverschiebung eines einseitig eingespannten Stabes mit linear veränderlichem Querschnittsradius r im Schwerefeld der Erde (Erdbeschleunigung g) untersucht werden. Es seien linear-elastisches Material, ein eindimensionaler Spannungszustand, über die Stablänge l konstante Dichte ρ und E-Modul E vorausgesetzt. Für die Radien $r_0 = r(x = 0)$ und $r_1 = r(x = l)$ gelte die Beziehung $r_1 = \frac{2}{3}r_0$. Zudem gilt $r \ll l$.



(a) Wählen Sie eine Ansatzfunktion, die den geometrischen Randbedingungen genügt. Berechnen Sie nun näherungsweise die Absenkung des freien Endes.

(b) Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Ergebnis.

49. Dargestellt ist ein Balken unter der Last q_0. Am rechten Ende ist eine Drehfeder (Federsteifigkeit c_M) angebracht. Bestimmen Sie eine Näherungslösung für die Durchsenkung $w(x)$.



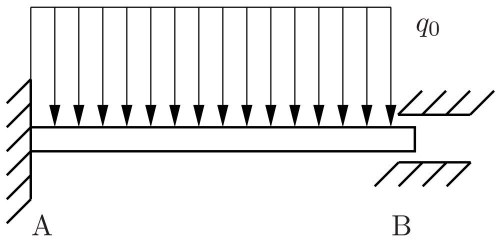
Verwenden Sie den Ansatz
$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Passen Sie den Ansatz an die 3 geometrischen Randbedingungen an. Eliminieren Sie a_0, a_1 und a_2, und geben Sie die angepasste Ansatzfunktion an.

(b) Berechnen Sie die Formänderungsenergie W und die äußere Arbeit A. Die Formänderungsenergie einer Drehfeder berechnet sich aus $W_F = \frac{1}{2}c_M\varphi^2$.
Hinweis: Es gilt $\varphi(x = l) = -w'(x = l)$.

(c) Berechnen Sie den Freiwert a_3 aus der Bedingung $\delta(W - A) = 0$, und geben Sie damit die Näherungslösung an.

50. Ein elastischer Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI) ist links fest eingespannt und rechts in einer Hülse gelagert. Der Balken wird auf seiner gesamten Länge durch eine konstante Streckenlast belastet.

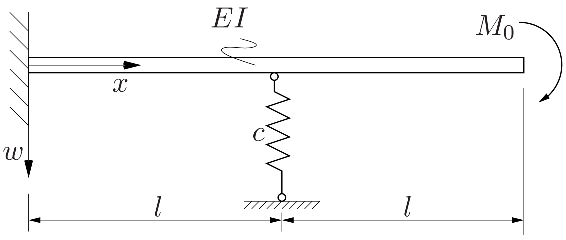


(a) Wählen Sie eine Ansatzfunktion, die die geometrischen Randbedingungen erfüllt.

(b) Berechnen Sie näherungsweise die Biegelinie.

(c) Vergleichen Sie die Näherungslösung mit der exakten Lösung.

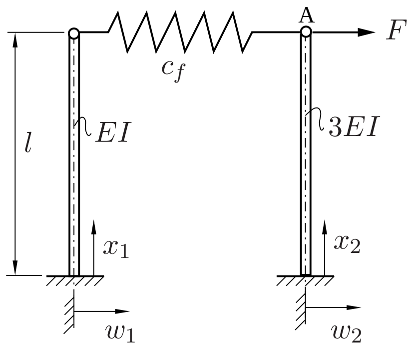
Geg.: q_0, l, EI



51. Mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens berechne man die Durchsenkung des skizzierten Balkens an der Stelle $x = 2l$. Als Ritzansatz soll folgende Funktion verwendet werden:

    $w(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \cosh(\frac{x}{l})$

    Geg.: M_0, EI, c, l



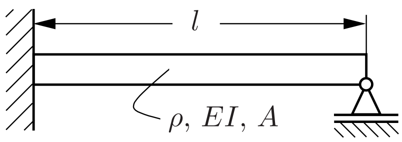
52. Für das aus zwei Stäben und einer linearen Feder bestehende System ist näherungsweise die Horizontalverschiebung des Punktes A zu bestimmen, wenn an diesem wie skizziert mit der Kraft F gezogen wird. Zur Lösung dieser Aufgabe sind folgende Teilschritte zu bearbeiten:

    (a) Für die Biegelinie beider Bereiche ist jeweils ein Polynom 3.Grades als Ansatzfunktion zu wählen. Passen Sie diese Ansatzpolynome den geometrischen Randbedingungen an; fordern Sie zudem, daß die das Moment betreffenden Randbedingungen erfüllt sind.

    (b) Stellen Sie das Energiefunktional $\Pi = A - W$ auf.

    (c) Berechnen Sie durch Extremalisierung dieses Funktionals ($\delta\Pi = 0$) die noch unbestimmten Koeffizienten und geben Sie die Näherungslösung für die Horizontalverschiebung im Punkte A an.

    Geg.: l, EI, $c_f = \frac{2EI}{l^3}$, F



53. Für den skizzierten einseitig fest eingespannten und am anderen Ende gelenkig gelagerten Balken ermittle man nach Ritz die erste Eigenkreisfrequenz und vergleiche sie mit dem exakten Wert:

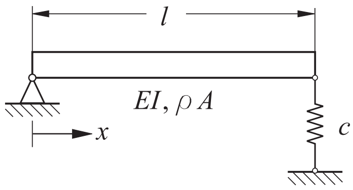
    $$\omega_{1,\,\mathrm{exakt}} = 15,42\,\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

    Warum ist die Näherungslösung zu groß?

    Ansatzfunktion:

    $$w(x,t) = x^2(l-x)^2 q(t)$$

    Geg.: ρ, A, EI, l



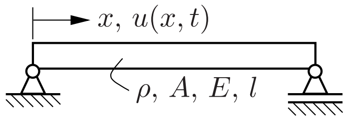
54. Berechnen Sie die beiden ersten Eigenkreisfrequenzen des skizzierten Balkens näherungsweise mit einem zweigliedrigen Ansatz nach Ritz:

$$w(x,t) = \varphi_1(x)q_1(t) + \varphi_2(x)q_2(t)\ .$$

Verwenden Sie die Ansatzfunktionen

$$\varphi_1(x) = \frac{x}{l}\ ; \quad \varphi_2(x) = \sin\frac{\pi x}{l} \quad .$$

Geg.: l, EI, c, ρA, $c = \pi^4 \frac{EI}{2l^3}$, EI =const.



55. Der dargestellte Stab führt infolge einer einmaligen Anregung Longitudinalschwingungen aus. Man ermittle:

(a) die exakte erste Eigenkreisfrequenz und

(b) Näherungen für die erste Eigenfrequenz unter Verwendung der Ansatzfunktionen:

  (a) $u(x,t) = x^2 q(t)$

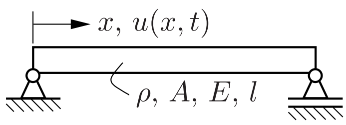
  (b) $u(x,t) = x^2(3l - 2x)q(t)$

  (c) $u(x,t) = \sin\frac{\pi x}{2l} q(t)$

Geg.: ρ, A, E, l

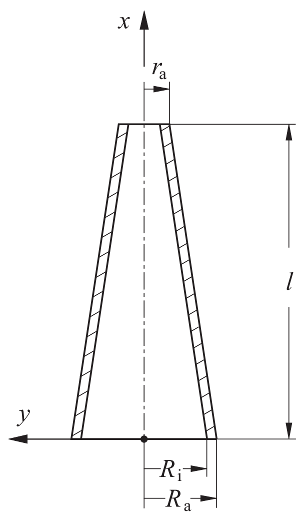
56. Der dargestellte Stab führt infolge einer einmaligen Anregung Longitudinalschwingungen aus. Ermitteln Sie mit dem Verfahren von Rayleigh-Ritz eine Näherungslösung für die erste Eigenkreisfrequenz unter Verwendung der Ansatzfunktion

$$u(x,t) = x^2(3l - 2x)q(t).$$



Geg.: ρ, A, E, l

57. Der skizzierte Betonschornstein konstanter Wandstärke führt Biegeschwingungen aus.



(a) Überprüfe die angegebene Funktion $\varphi(x)$ auf ihre Brauchbarkeit als Ansatz für eine näherungsweise Bestimmung der ersten Eigenkreisfrequenz (nach Ritz).

(b) Bestimme näherungsweise die niedrigste Eigenfrequenz des Systems!

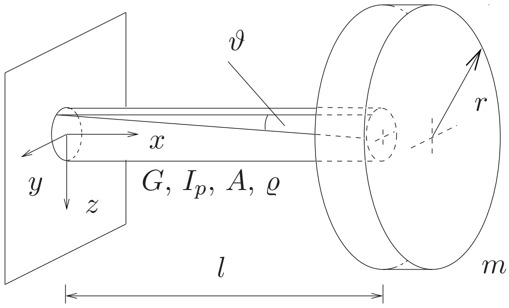
$$\varphi(x) = l^4\left[6\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right]$$

Geg.: l, E, ρ, r_a, $R_a = 2r_a$, $R_a - R_i = \frac{1}{2}r_a$

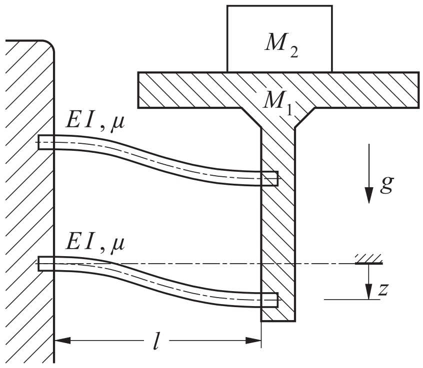
58. Ein eingespannter, massebehafteter Stab mit kreisförmigem Querschnitt trägt an seinem Ende eine Einzelmasse m. Geeignete Anfangsbedingungen lassen den Stab um seine Längsachse schwingen.

    Bestimmen Sie näherungsweise die erste Eigenkreisfrequenz.

    Geg.: l, r, m, G, I_p, A, ϱ



59. Auf dem Tisch einer Waage liegt ein Paket (Masse M_2). Der Tisch (Masse M_1) wird von zwei Blattfedern (Biegesteifigkeit EI, Massebelegungen μ, Längen l) so gehalten, daß er in vertikaler Richtung schwingen kann. Für beide Blattfedern wird die Verformung mit der gleichen Ansatzfunktion, einem Polynom dritten Grades, beschrieben. Bei $z = 0$ sind die Blattfedern entspannt.



    (a) Beschreibe das Vorgehen zur exakten Bestimmung der Eigenfrequenzen des abgebildeten Systems. Wieviele Eigenfrequenzen hat das System?

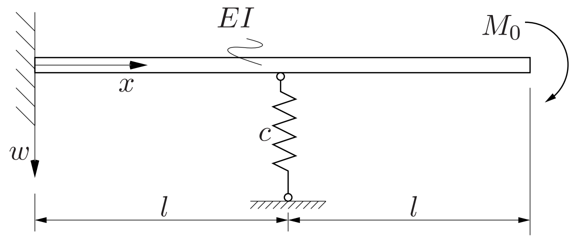
    (b) Wie muß die Ansatzfunktion gewählt werden, damit alle geometrischen Randbedingungen erfüllt werden?

    (c) Stelle die kinetische und potentielle Energie für kleine Schwingungen $z(t)$ des Systems auf. Beachte dabei die Wirkung der Erdbeschleunigung g.

    (d) Formuliere das Prinzip der kleinsten Wirkung für das untersuchte System und bestimme näherungsweise die niedrigste Eigenkreisfrequenz.

    (e) Wie groß ist die statische Absenkung z_{stat} des Systems?

60. Mit Hilfe des Ritzschen Verfahrens berechne man näherungsweise die Biegelinie. Vergleichen Sie ihr Ergebnis für die Durchsenkung an der Stelle $x = 2l$ für den Spezialfall $c = 0$ mit dem exakten Ergebnis.



    Es soll der folgende zweigliedrige Ansatz verwendet werden:

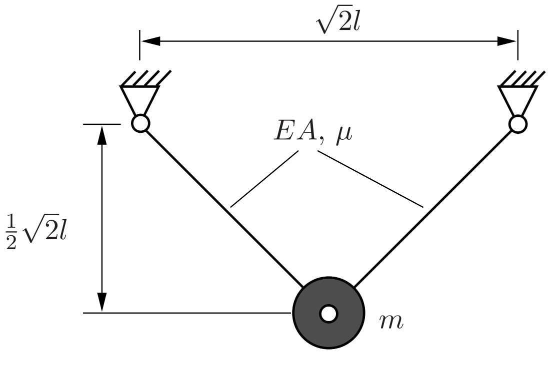
$$w(x) = q_1 f_1(x) + q_2 f_2(x) \quad ,$$

    wobei die beiden Formfunktionen f_1 und f_2 Polynome sind.

    Hinweis: Es ist zweckmäßig, die Formfunktionen so zu normieren, daß q_1 die Durchsenkung des Balkens in der Mitte ($x = l$) und q_2 die Verdrehung des Balkens am rechten Ende ($x = 2l$) sind.

    Geg.: M_0, EI, c, l

61. Betrachtet wird ein Stabwerk aus zwei identischen Stäben (Länge l, Dehnsteifigkeit EA, Massebelegung μ). Am oberen Ende sind die Stäbe gelenkig an die Umgebung angebunden. Am unteren Ende sind beide Stäbe gelenkig mit einer Punktmasse m verbunden. Betrachtet werden ausschließlich kleine Vertikalbewegungen der Punktmasse. Vereinfachend sei angenommen, daß beide Stäbe stets gleich schwingen.



Im folgenden soll mit verschiedenen Verfahren die niedrigste Eigenkreisfrequenz bzw. eine Näherung für die niedrigste Eigenkreisfrequenz des Systems bestimmt werden.

(a) Wieviele Freiheitsgrade hat das abgebildete System?

(b) Wie lauten die geometrischen Randbedingungen?

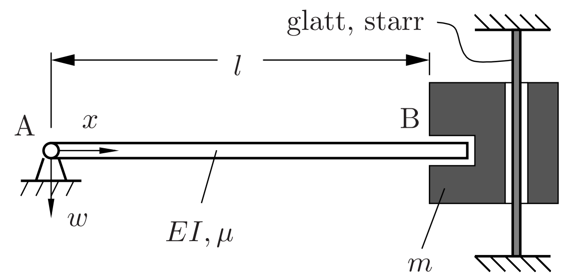
(c) Leite die Bewegungsdifferentialgleichungen und die dynamischen Randbedingungen für das untersuchte System her.

(d) Wie lautet die Frequenzgleichung des untersuchten Systems? Bestimme nun für $\mu = \frac{m}{10l}$ die niedrigste Eigenkreisfrequenz des Systems.
Hinweis: Die kleinste positive Lösung der Gleichung $10\chi \tan\chi = 1$ ist $\chi_1 \approx 0,3111$.

(e) Welche Eigenkreisfrequenz erhält man für $\mu = \frac{m}{10l}$, wenn man einen linearen Ritz-Ansatz für die Längsverschiebung der Stäbe wählt?

(f) Vernachlässigt man die Stabmasse gegenüber der Punktmasse, erhält man einen Einmassenschwinger. Bestimme die zugehörige Eigenkreisfrequenz mit dem zweiten Satz von Castigliano. Vergleiche die drei Ergebnisse miteinander.

62. Ein massebehafteter Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI, Massebelegung μ) ist bei A gelenkig gelagert und bei B in eine Hülse gesteckt, die dem Balken dort eine horizontale Tangente aufzwingt. Die Hülse (Masse m) kann auf einer starren Stange in vertikaler Richtung reibungsfrei gleiten. Der Balken schwingt ausschließlich in Querrichtung.



(a) Wählen Sie eine Ansatzfunktion (z.B. eine harmonische Funktion), die den geometrischen Randbedingungen genügt.

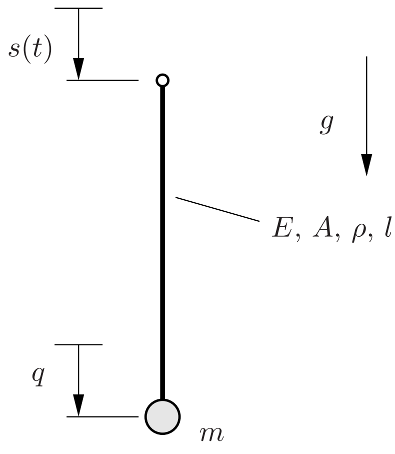
(b) Bestimmen Sie nun die bezogene kinetische und maximale potentielle Energie des Systems.

(c) Berechnen Sie schließlich eine Näherung für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1?

Geg.: EI, l, m, μ

Hinweis: $\int \sin^2 ax \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\sin 2ax$

63. Das abgebildete System besteht aus einem elastischen, massebehafteten Seil (Dichte ρ, Länge l, Querschnittsfläche A, E-Modul E) und einer Endmasse m.



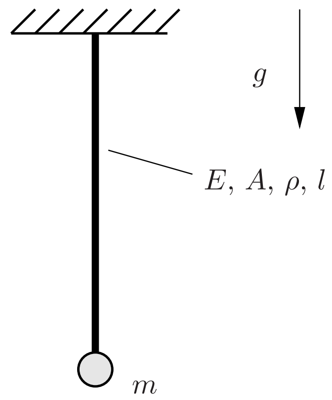
Es sollen die erzwungenen Längsschwingungen des Systems untersucht werden. Die Position des oberen Endes ist vorgegeben: $s = \hat{s}\cos\Omega t$. Die Position der Endmasse sei mit q bezeichnet. Wenn das Seil nicht gedehnt ist, gilt $q = s$.

Leiten Sie für den Fall, daß man die Verschiebung $u(x,t)$ des Seils mit folgendem Ritz-Ansatz $u(x,t) = s(t) + \frac{x}{l}(q(t) - s(t))$ beschreiben kann, die Bewegungsdifferentialgleichung her. Überprüfen sie zunächst, ob der gegebene Ansatz im Sinne von Ritz zulässig ist.

Geg.: l, E, A, ρ, m, g, $\hat{s}$, Ω

Anmerkung: Das untersuchte System kann u.a. als ein sehr einfaches Modell zur Beschreibung der Bewegung von kabelgebundenen Systemen in der Meerestechnik (z.B. remotely operated vehicle) dienen. Die Bewegung des oberen Kabelendes wird durch den Seegang verursacht.

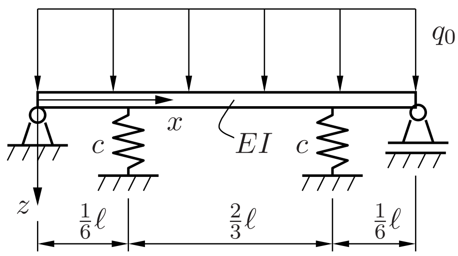
64. Das abgebildete System besteht aus einem elastischen, massebehafteten Stab (Dichte ρ, Länge l, Querschnittsfläche A, E-Modul E) und einer Endmasse m.



Mit Hilfe eines eingliedrigen Ansatzes nach Ritz soll näherungsweise die erste Eigenkreisfrequenz berechnet werden, wobei die Längsverschiebung der Punktmasse den Freiheitsgrad $q(t)$ beinhaltet. Als Formfunktion ist ein linearer Ansatz zu wählen.

Geg.: l, E, A, ρ, m, g,

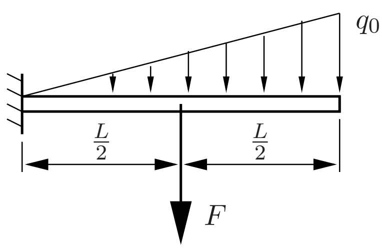
65. Ermitteln Sie mit dem Ritzschen Verfahren für das skizzierte System die Durchbiegung an der Stelle $x = \ell/2$. Verwenden Sie dazu den folgenden Ansatz, nachdem Sie ihn an die geometrischen Randbedingungen angepaßt haben.



Ansatz: $w(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Geg.: EI, c, q_o, ℓ

66. Ein Kragbalken der Länge L mit konstanter Biegesteifigkeit EI ist mit einer wie skizziert linear verteilten Streckenlast und einer in der Mitte angreifenden Einzellast F belastet.



Bestimmen Sie die Verschiebung des freien Balkenendes mit dem Näherungsverfahren nach Ritz.

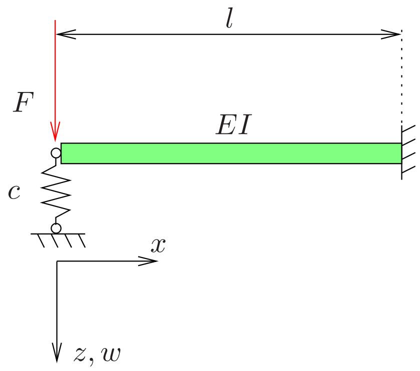
Die Biegelinie nach Theorie erster Ordnung soll mit einem Polynom dritten Grades approximiert werden, das die geometrischen Randbedingungen erfüllt.

Geg.: EI, L, F, Maximum der Streckenlast: q_0

67. Auf einen Bernoulli-Balken der Länge l und der Biegesteifigkeit EI wirkt die Kraft F. Bestimmen Sie die Durchsenkung des Balkens bei $x = 0$ näherungsweise, nämlich für den Ritz-Ansatz

$$w(x) = a\big(1 - \sin\frac{\pi x}{2l}\big)$$

mit dem PdvV. Benutzen Sie das gegebene Koordinatensystem, und gehen Sie wie folgt vor:



(a) Berechnen Sie w', w'' und $\delta w, \delta w', \delta w''$. Zeigen Sie, dass der Ansatz die beiden geometrischen Randbedingungen erfüllt.

(b) Berechnen Sie die Variationen der Formänderungsenergien: δW_{F} (Feder) und δW_{B} (Balken, Hinweis $\int_0^l \big(\sin\frac{\pi x}{2l}\big)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}l$).

(c) Bestimmen Sie die virtuelle äußere Arbeit δA.

(d) Bestimmen Sie $a = w(x = 0)$ aus $\delta W_{\mathrm{B}} + \delta W_{\mathrm{F}} = \delta A$ (PdvV).

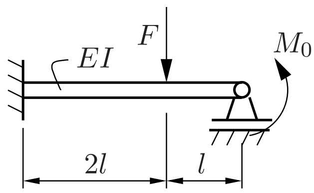
(e) Bestimmen Sie jetzt das elastische Potenzial $\Pi = W_{\mathrm{B}} + W_{\mathrm{F}} - A$. Berechnen Sie a aus der Bedingung $\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0$. Kontrollieren Sie damit Ihr Ergebnis aus (d).

Geg.: EI, c, l, F, $W_{\mathrm{B}} = \frac{EI}{2}\int w''^2 \mathrm{d}x$

4 Sätze von Castigliano

68. Berechne für den skizzierten Balken die Durchbiegung an der Krafteinleitungsstelle und die Auflagerreaktionen. Verwende dazu den ersten Satz von Castigliano.

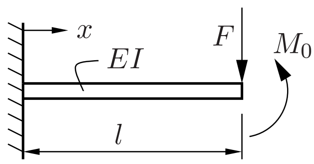
Geg.: M_0, F, EI, l



69. Am Ende des skizzierten schubstarren Balkens mit der Biegesteifigkeit EI greifen ein Moment M_0 und eine Einzellast F an.

(a) Berechne die das elastische Potential U_{el} des Systems. Bestimme nun mit dem ersten Satz von Castigliano die Durchsenkung $w_1(l)$ und den Biegewinkel $\varphi_1(l)$ am rechten Ende des Balkens ($x = l$).

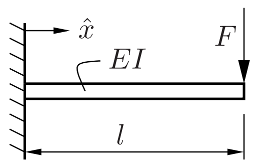
(b) Berechne den Biegewinkel $\varphi_2(l)$ am rechten Balkenende für den Fall $M_0 = 0$.



Geg.: M_0, F, EI, l

70. Berechne mit Hilfe des Satzes von Castigliano die Biegelinie $w(\hat{x})$ des skizzierten Kragarms mit der Biegesteifigkeit EI unter Einwirkung der Einzellast F am freien Ende.

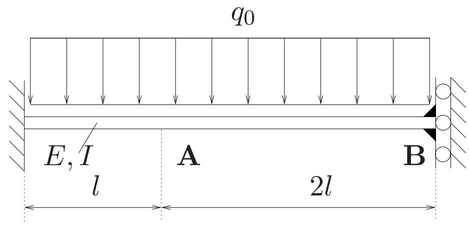
Geg.: F, l, EI



71. Gegeben ist die nebenstehend skizzierte Konstruktion.

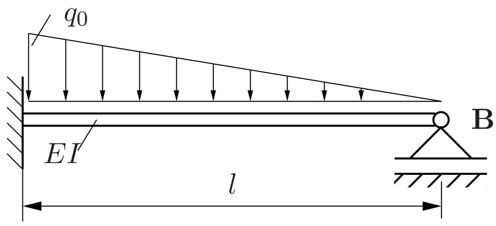
    Berechnen Sie unter Verwendung des ersten Satzes von Castigliano die Durchsenkung an der Stelle **A**.

    Geg.: l, q_0, E, I, der Balken sei schubstarr



72. Für den skizzierten schubstarren Träger mit der konstanten Biegesteifigkeit EI ist mittels des ersten Satzes von Castigliano die Lagerkraft an der Stelle **B** zu bestimmen.

    Geg.: l, EI, q_0



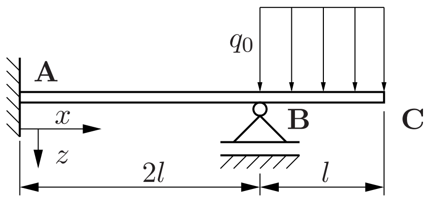
73. Der skizzierte dehn- und schubstarre Träger mit der konstanten Biegesteifigkeit EI ist einfach statisch unbestimmt.

    (a) Machen Sie das System statisch bestimmt, indem Sie das Lager an der Stelle **B** durch eine noch zu bestimmende Kraft ersetzen.

    (b) Unterteilen Sie den Balken in zwei Bereiche, und ermitteln Sie den Momentenverlauf analytisch.

    (c) Ermitteln Sie die Ableitung der Formänderungsenergie, und bestimmen Sie die eingeführte unbekannte Kraft.

    (d) Geben Sie alle Lagerkräfte bzw. -momente an.

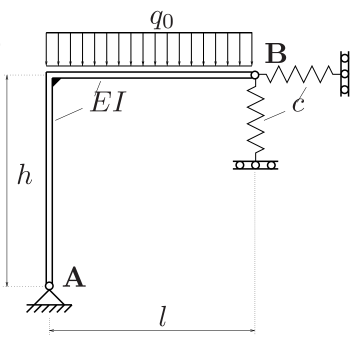


    Geg.: l, E, I, q_0

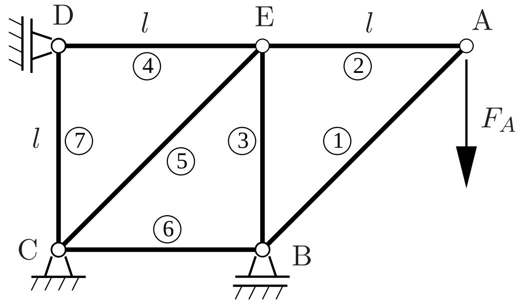
74. Ein rechtwinkliger, einhüftiger Tragrahmen wird wie skizziert durch die Streckenlast $q(x)$ belastet. Der Rahmen wird als biegeelastisch, aber dehn- und schubstarr angesehen.

    Berechnen Sie mit den Sätzen von CASTIGLIANO die Lagerreaktionen an den Orten **A** und **B**.

    Geg.: h, l, E, I, c, q_0



75. Das abgebildete Fachwerk aus 7 Stäben mit der Dehnsteifigkeit EA ist innerlich statisch bestimmt. Aufgrund der Lagerung in den Punkten B, C, D ist das Fachwerk äußerlich einfach statisch überbestimmt.



Die (komplementäre) Formänderungsenergie eines longitudinal gedehnten Stabes beträgt:

$$U_{\text{Stab}} = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{N^2}{EA} dx$$

(a) Machen Sie die Lagerung des Fachwerks statisch bestimmt, indem Sie das Lager bei B entfernen und dort die Lagerkraft F_B einführen. Bestimmen Sie dann die Kräfte in den Stäben, z.B. indem Sie die Knoten A, B und E freischneiden.

(b) Berechnen Sie nun die (komplementäre) Formänderungsenergie U des Fachwerkes als Funktion der Kräfte F_A und F_B.

(c) Nutzen Sie im folgenden die (komplementäre) Formänderungsenergie

$$U = \frac{l}{EA}\left[aF_A^2 + bF_AF_B + cF_B^2\right] ,$$

mit den bekannten Konstanten a, b und c. Berechnen Sie die Lagerkraft F_B.

(d) Wie groß ist die statische Durchsenkung in vertikaler Richtung u_A am Punkt A?

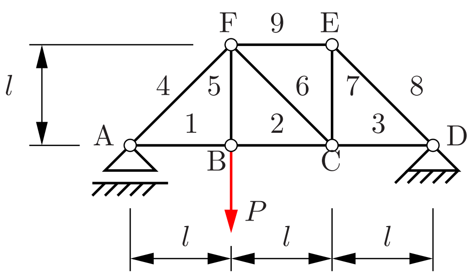
(e) An der Stelle A sei nun statt der Kraft F_A eine Punktmasse m angebracht. Die Masse der Stäbe soll gegenüber dieser Punktmasse vernachlässigt werden.

Betrachtet werden ausschließlich vertikale Schwingungen der Punktmasse m. Das Fachwerk verhält sich dann wie eine lineare Feder. Wie groß ist die Ersatzfedersteifigkeit? Welche Eigenkreisfrequenz hat das System?

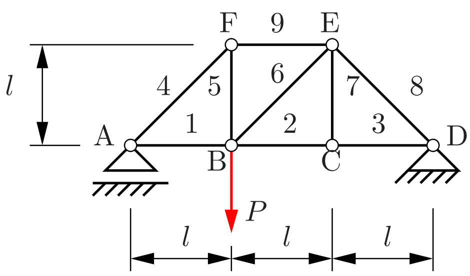
Geg.: F_A, l, EA, m

76. Ein Fachwerk aus 9 Stäben ist in A und D gelagert. Im Punkt B wirkt eine vertikale Kraft P. Die Stäbe haben alle die gleiche Querschnittsfläche A und den gleichen E-Modul E.

Variante 1



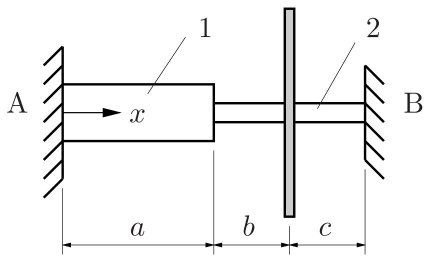
Variante 2



Es werden zwei verschiedene Varianten vorgeschlagen (siehe Bild). Welche Variante ist zu wählen, wenn die vertikale Durchsenkung in B möglichst klein sein soll? Wie groß ist die Durchsenkung im besseren Fall?

Geg.: P, l, E, A

77. Die Enden einer abgesetzten Welle (Abschnitt 1: Durchmesser d_1, Abschnitt 2: Durchmesser d_2) sind in den Lagern A und B gegen Verdrehung festgehalten. Auf ein Zahnrad, das mit der Welle fest verbunden ist, wirkt ein Kräftepaar, so daß auf die Welle das Torsionsmoment M_T übertragen wird.



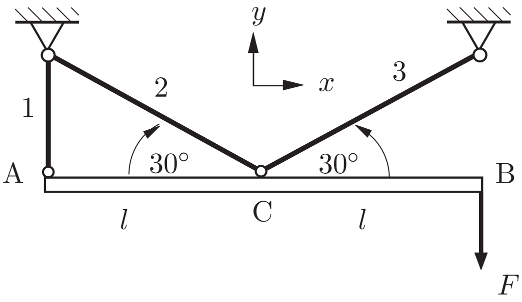
(a) Wie groß sind die in den Lagern A und B aufzunehmenden Torsionsmomente?

(b) An welcher Stelle müßte das Zahnrad auf dem Wellenabsatz 2 befestigt sein, damit der Verdrehwinkel maximal wird?

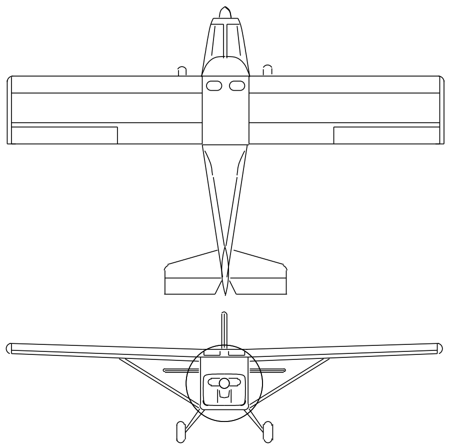
Geg.: d_1, d_2, a, b, c, M_T

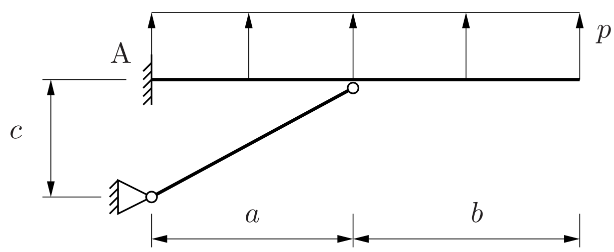
78. Ein Balken (Länge $2l$, Biegesteifigkeit EI) ist mit drei Stäben (Dehnsteifigkeit EA) statisch bestimmt gestützt. Berechnen Sie mit Hilfe des **Satzes von CASTIGLIANO** die Verschiebung des Punktes B in Richtung der Kraft F.

Geg.: l, EI, EA



79. Der Flügel eines Hochdeckerflugzeuges erzeugt annähernd eine über die Flügelspannweite konstante Auftriebslast p. Um das Biegemoment an der fest eingespannten Flügelwurzel A zu reduzieren, wurde eine Strebe BC eingebaut. Der Flügelaufbau wird wie abgebildet durch einen schubstarren Balken und einen Stab modelliert. Alle Teile seien aus dem gleichen Material.





(a) Ist das System statisch bestimmt?

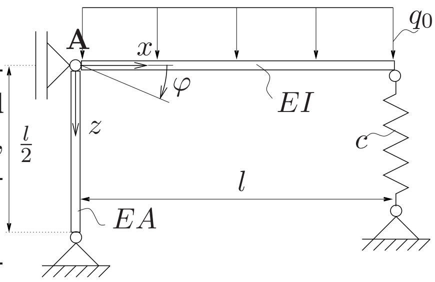
(b) Bestimmen Sie die komplementäre Formänderungsenergie W^* als Funktion der Stabkraft.

(c) Wie groß ist die Kraft in der Strebe?

(d) Wie groß ist das Biegemoment an der Flügelwurzel?

Geg.: I, A_1, A_2, c, a, b, p

80. Dargestellt ist ein System aus einem schubstarren Balken, einem Dehnstab und einer Feder. Berechnen Sie die Verdrehung φ am Lagerpunkt **A** unter Verwendung des Satzes von CASTIGLIANO. Gehen Sie dazu wie folgt vor:



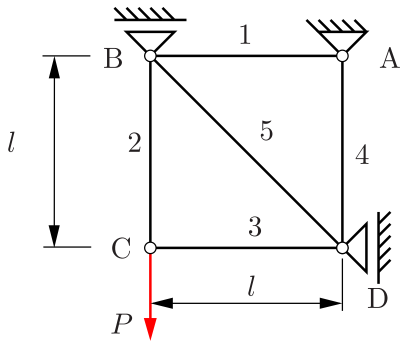
(a) Berechnen Sie zunächst die maßgeblichen Schnittkräfte in Dehnstab, Balken und Feder N, M und F unter Berücksichtigung eines Hilfsmoments M_H, das dort anzubringen ist, wo der Verdrehwinkel gesucht ist.

(b) Berechnen Sie die gesuchte Verdrehung unter Ausnutzung von
$\frac{\partial W}{\partial M_H} = \frac{\partial W^*}{\partial M_H} = \frac{1}{EI}\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial M_H}dx + \frac{1}{EA}\int_0^{\frac{l}{2}} N\frac{\partial N}{\partial M_H}dz + \frac{F}{c}\frac{\partial F}{\partial M_H}$

(c) Berechnen Sie die Verdrehung φ nun für den Spezialfall $EI \to \infty$ und $c \to \infty$.

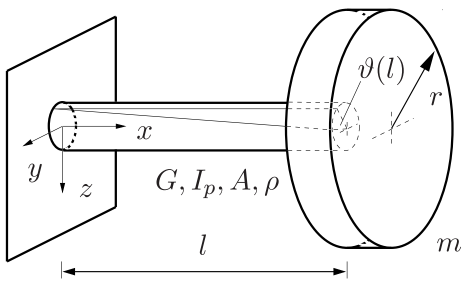
81. Alle Stäbe des Fachwerks haben die gleiche Querschnittsfläche A und den gleichen E-Modul E. Berechne die vertikale Verschiebung des Lasteinleitungspunktes C unter der Einwirkung der äußeren Last P.

Geg.: P, l, E, A



5 Prinzip der stationären Wirkung, Hamiltonsches Prinzip

82. Ein eingespannter, massebehafteter Stab mit kreisförmigem Querschnitt trägt an seinem Ende eine Einzelmasse.



(a) Wie lautet die *geometrische* Randbedingung für das System?

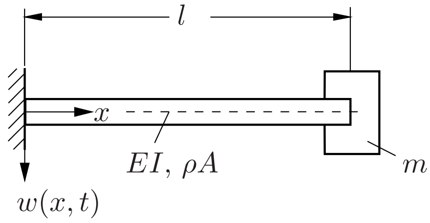
(b) Berechnen Sie die kinetische Energie K und die potentielle Energie U für das Gesamtsystem.

(c) Formulieren Sie das Prinzip von HAMILTON für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamische* Randbedingung her.

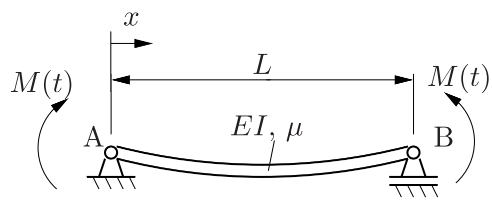
Geg.: l, m, G, I_p, A, ρ, r

83. Ein bei $x = 0$ eingespannter Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI = konst., Massebelegung ρA = konst.) mit der Endmasse m an der Stelle $x = l$ soll Eigenschwingungen durchführen. Mit Hilfe des Hamilton Prinzips sind die dynamischen Randbedingungen und die Bewegungsdifferentialgleichung zu ermitteln. Die Endmasse soll dabei als Massepunkt angenommen werden.



Geg.: EI, l, ρA, m.

84. Ein elastischer, massebehafteter Balken (Biegesteifigkeit EI, Länge L, Querschnittsfläche A und Dichte ρ) ist links und rechts gelenkig gelagert. An beiden Enden greift ein periodisches Moment $M(t) = M_0 \cos \Omega t$ an.



(a) Wie lauten die *geometrischen* Randbedingungen für das System?

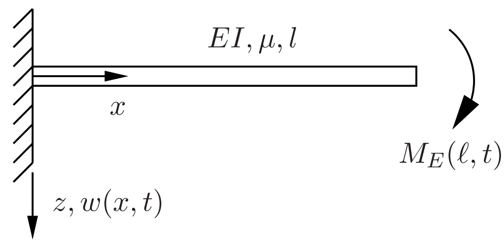
(b) Berechnen Sie die kinetische Energie K, die potentielle Energie U sowie die virtuelle Arbeit δW für das Gesamtsystem.

(c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamischen* Randbedingungen her.

Geg.: M_0, Ω, L, EI, A, μ

85. Ein Kragbalken wird wie abgebildet durch ein Moment am rechten Rand belastet.



(a) Wie lauten die *geometrischen* Randbedingungen für das System?

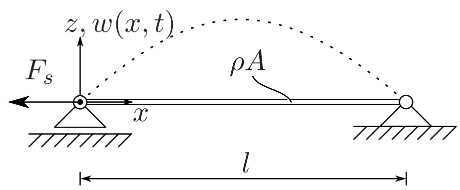
(b) Berechnen Sie die kinetische Energie K, die potentielle Energie U sowie die virtuelle Arbeit δW für das Gesamtsystem.

(c) Formulieren Sie das Prinzip von HAMILTON für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamischen* Randbedingungen her.

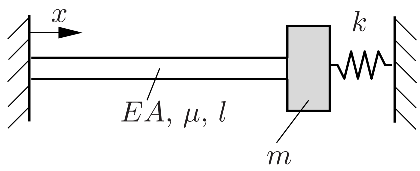
Geg.: $EI, \mu := \rho A, l, M_E = M(t)$

86. Eine (dehnstarre) Saite der Länge l wird mit F_s vorgespannt und trägt die Masse pro Länge $\mu := \rho A$. Leiten Sie die Bewegungs-Differentialgleichung mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung (Prinzip von HAMILTON) her.



Geg.: F_s, μ, l

87. Ein massebehafteter elastischer Stab (Dehnsteifigkeit EA, Massebelegung μ, Länge l) ist am linken Rand ($x = 0$) fest eingespannt und trägt am rechten Rand ($x = l$) eine Punktmasse m. Die Punktmasse ist außerdem über eine Feder (Steifigkeit k) an die Umgebung gekoppelt.



Die Feder sei entspannt, wenn der Stab unverformt ist. Es werden ausschließlich Längsschwingungen $u(x,t)$ betrachtet.

(a) Wie lautet die *geometrische* Randbedingung für das System?

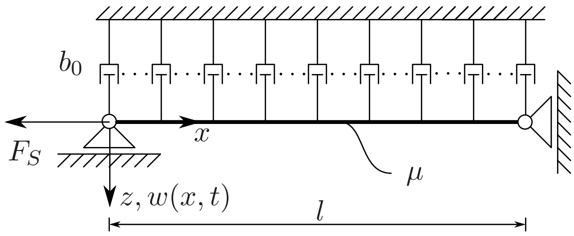
(b) Wie berechnen sich die kinetische Energie K und die potentielle Energie U für das Gesamtsystem?

(c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamische* Randbedingung her.

Geg.: m, k, l, $EA =$ konst., $\mu := \rho A =$ konst.,

88. Eine von einem viskosen Medium umgebene Saite (Länge l, Masse pro Länge μ) wird mit einer Kraft F_S vorgespannt und am rechten Ende in z-Richtung verschieblich gelagert. Die dissipative Wirkung des Mediums wird wie skizziert durch eine linienhaft verteilte Dämpfung $b(x) = b_0$ modelliert. Das Erdschwerefeld wird vernachlässigt.
Mit dem Prinzip von Hamilton soll die Bewegungsdifferentialgleichung und die dynamische(n) Randbedingung(en) bestimmt werden.



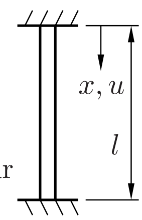
(a) Geben Sie die kinetische Energie K und die potentielle Energie U des Systems an.

(b) Bestimmen Sie die virtuelle Arbeit δW infolge der Dämpfung.

(c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton und ermitteln Sie daraus die Bewegungsdifferentialgleichung und die dynamische(n) Randbedingung(en).

Geg.: F_S, $\mu := \rho A =$ konst., $b(x) = b_0 =$ konst., l

89. Gegeben ist der skizzierte homogene Dehnstab.



(a) Wie lauten die *geometrischen* Randbedingungen für das System?

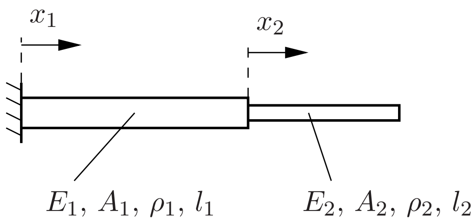
(b) Berechnen Sie die kinetische Energie K und die potentielle Energie U für das Gesamtsystem.

(c) Formulieren Sie das Prinzip von Hamilton für das untersuchte System.

(d) Leiten Sie nun die Bewegungsdifferentialgleichung und die *dynamischen* Randbedingungen her.

Geg.: μ, A, E, l

90. Zwei Stäbe (Längen l_1, l_2 Querschnittsflächen A_1, A_2, E-Moduln E_1, E_2 und Dichten ρ_1, ρ_2) sind wie skizziert miteinander verbunden und links fest eingespannt. Das System schwingt ausschließlich in Längsrichtung.



Benutze zur Formulierung der Bewegungsdifferentialgleichungen und Randbedingungen die eingezeichneten raumfesten Koordinaten x_1 und x_2.

(a) Wie lauten die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen für das dargestellte System?

(b) Formuliere die kinetische und potentielle Energie für das Gesamtsystem.

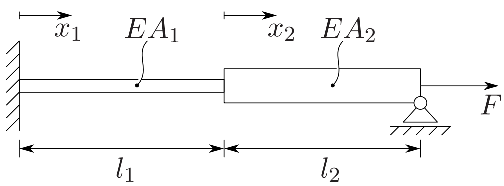
(c) Leite nun die Bewegungsdifferentialgleichungen und die dynamischen Randbedingungen mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung her!

(d) Mit welchem Ansatz kann man die Eigenfrequenzen des Systems bestimmen? Wieviele Eigenfrequenzen hat das System?

Geg.: E_1, E_2, A_1, A_2, ρ_1, ρ_2, l_1, l_2

6 Methode der finiten Elemente

91. Ein Träger besteht aus zwei Dehnstäben mit unterschiedlichen Querschnittsflächen A_i. Es wirkt die äußere Last F. Mit Hilfe der *Methode der Finiten Elemente* sollen die Längsverschiebungen $u(x_1 = l_1)$ und $u(x_2 = l_2)$, sowie die horizontale Lagerreaktion im linken Auflager F_H bestimmt werden. Dazu soll das System in zwei Finite Elemente ($x_1 \in [0, l_1]$ bzw. $x_2 \in [0, l_2]$) unterteilt werden.



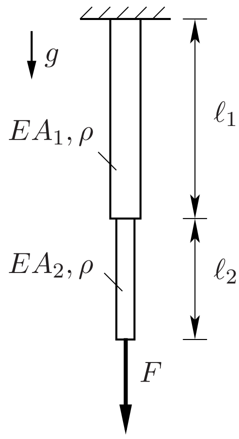
(a) Setzen Sie lineare Ansatzfunktionen für die Längsverschiebung $u(x_1)$ bzw. $u(x_2)$ an und stellen Sie das Elastische Potential Π des Systems dar.

(b) Bestimmen Sie durch Variation von Π das Gleichungssystem zur Bestimmung der Endverschiebungen ($u(x_1 = l_1)$, $u(x_2 = l_2)$) und der Lagerreaktion (F_H). Leiten Sie hieraus die Elementsteifigkeitsmatrix ab.

(c) Bestimmen Sie die Verschiebungen $u(x_1 = l_1)$ und $u(x_2 = l_2)$, sowie F_H.

Geg.: l_1, l_2, A_1, A_2, E, F

92. Der massebehaftete linear elastische Stab besteht aus zwei Bereichen mit jeweils unterschiedlichen Längen ℓ_1, ℓ_2 und Querschnittsflächen A_1, A_2. Neben der Belastung durch die Schwerkraft greift am unteren Ende eine Einzelkraft F an.



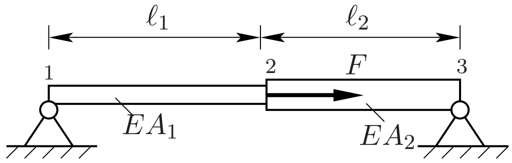
(a) Stellen Sie ein Ersatzsystem auf, in welchem die Vertikallast in der Einspannung als eingeprägte Kraft wirkt. Ermitteln Sie nun das elastische Gesamtpotential $\Pi = W - A$. Als Ansatzfunktion für die Längsverschiebung in beiden Bereichen soll dabei eine lineare Funktion genutzt werden.

(b) Nutzen Sie das Prinzip der virtuellen Verrückungen $\delta\Pi = 0$ zur Aufstellung der Bestimmungsgleichungen für die Knotenverschiebungen sowie die unbekannte Lagerreaktion und stellen Sie das Gleichungssystem in Matrizenschreibweise auf.

(c) Ermitteln Sie aus dem reduzierten System die Knotenverschiebungen u_2 und u_3. Abschließend ist die Lagerkraft zu bestimmen.

Geg.: ℓ_1, $\ell_2 = \frac{\ell_1}{2}$, A_1, $A_2 = \frac{A_1}{2}$, g, F, E, ρ

93. Der skizzierte linear elastische Stab besteht aus zwei Bereichen mit jeweils unterschiedlichen Längen ℓ_1, ℓ_2 und Querschnittsflächen A_1, A_2. Er ist beidseitig durch Festlager an die Umgebung gekoppelt. Am mittleren Knoten 2 greift die Horizontallast F an.



(a) Stellen Sie ein Ersatzsystem auf, in welchem die zu berechnenden Auflagerreaktionen als eingeprägte Kräfte wirken. Ermitteln Sie anschließend das elastische Gesamtpotential $\Pi = W - A$. Als Ansatzfunktion für die Längsverschiebung in beiden Bereichen soll dabei eine lineare Funktion genutzt werden. Als generalisierte Koordinaten sind die Knotenverschiebungen heranzuziehen.

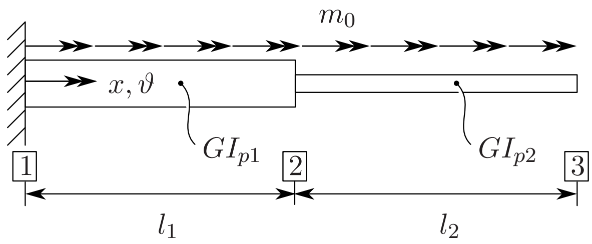
(b) Nutzen Sie das Prinzip der virtuellen Verrückungen $\delta\Pi = 0$ zur Aufstellung der Bestimmungsgleichungen für die Knotenverschiebung im Knoten 2 sowie die unbekannten Lagerkräfte und stellen Sie das Gleichungssystem in Matrizenschreibweise dar.

(c) Ermitteln Sie aus dem reduzierten System die Knotenverschiebung u_2.

(d) Berechnen Sie die (horizontalen) Lagerreaktionen.

Geg.: ℓ_1, $\ell_2 = \ell_1$, A_1, $A_2 = 2A_1$, F, E

94. Zwei verbundene Torsionsstäbe mit unterschiedlichen Querschnittsflächen und Längen werden durch eine Konstante Momentenschüttung m_0 belastet.



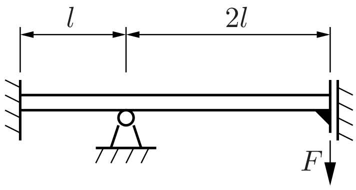
   (a) Setzen Sie lineare Ansatzfunktionen für den Verdrehwinkel $\vartheta(x_1)$ bzw. $\vartheta(x_2)$ an und stellen Sie das Elastische Potential Π des Systems dar.

   (b) Bestimmen Sie durch Variation von Π das Gleichungssystem zur Bestimmung der Endverschiebungen ($\vartheta(x_1 = l_1)$, $\vartheta(x_2 = l_2)$) und das Lagermoment (M_1). Leiten Sie hieraus die Elementsteifigkeitsmatrix ab.

   (c) Bestimmen Sie die Verschiebungen $\vartheta(x_1 = l_1)$ und $\vartheta(x_2 = l_2)$, sowie M_1.

   Geg.: l_1, l_2, I_{p1}, I_{p2}, m_0, G

95. Ein elastisches System sei wie nebenstehend skizziert als Balken unter einer Einzellast modelliert. Mit der *Finite Elemente Methode* ist das Moment auf die Verschiebehülse am rechten Ende zu berechnen. Der Balken soll dabei in <u>zwei</u> Elemente aufgeteilt werden und die Knotennummerierung am linken Rand beginnen.



   (a) Stellen Sie das Gesamtgleichungssystem mit Verschiebungsspalte, Steifigkeitsmatrix und Lastspalte auf.

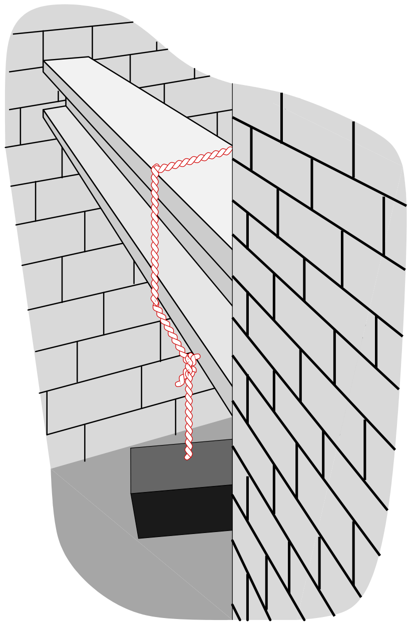
   (b) Geben Sie das reduzierte Gleichungssystem (ebenfalls in Matrixschreibweise) an.

   (c) Berechnen Sie die unbekannten Knotenverschiebungen und das Einspannmoment an der Verschiebehülse rechts.

   Hinweis: Die Elementschnittlasten und Knotenverschiebungen eines Elements α mit der Länge l_α und der Biegesteifigkeit EI sind wie folgt über die Elementsteifigkeitsmatrix verknüpft (vgl. Gross, Hauger, Schnell; Technische Mechanik 4, 2004, S 403 ff):

$$\begin{bmatrix} F_{q,l} \\ M_{b,l}/l \\ F_{q,r} \\ M_{b,r}/l \end{bmatrix} = \frac{EI}{l_\alpha^3} \begin{bmatrix} 12 & -6p_\alpha & -12 & -6p_\alpha \\ -6p_\alpha & 4p_\alpha^2 & 6p_\alpha & 2p_\alpha^2 \\ -12 & 6p_\alpha & 12 & 6p_\alpha \\ -6p_\alpha & 2p_\alpha^2 & 6p_\alpha & 4p_\alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_l \\ \varphi_l\, l \\ w_r \\ \varphi_r\, l \end{bmatrix} \qquad \text{mit } p_\alpha := \frac{l_\alpha}{l}$$

   Geg.: l, F, EI



96. Ein Stahlträger verbindet zwei Gebäude. Auf beiden Seiten ist er fest eingemauert. Im Abstand $2l$ von der hinteren Wand und l von der vorderen Wand wird er von einem Gewicht mit der Kraft G belastet. (Daraus folgt: Der Abstand der Wände voneinander beträgt $3l$ und die Belastung erfolgt nicht in der Mitte.)

Mit dem Verfahren der Steifigkeitsmatrizen ist das Einspannmoment an der hinteren Wand zu ermitteln. Dabei soll der Balken in zwei Elemente zerteilt werden und die Knotennummerierung an der hinteren Wand beginnen. Alle Gleichungssysteme müssen in **Matrixschreibweise** angegeben werden!

Geg.: l, G, Biegesteifigkeit des Stahlträgers K_B

(a) Stellen Sie das Gesamtgleichungssystem auf.

(b) Geben Sie das reduzierte Gleichungssystem an.

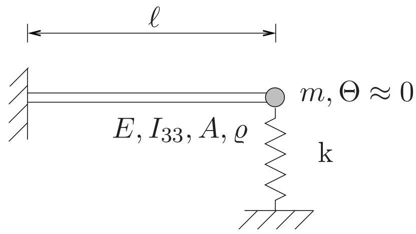
(c) Berechnen Sie die unbekannten Knotenverschiebungen.

(d) Berechnen Sie das Einspannmoment an der hinteren Wand.

(e) Geben Sie das reduzierte Gleichungssystem für den Fall an, daß sich das vordere Gebäude um die Länge b abgesenkt hat.

Hinweis: Die Elementschnittlasten und Knotenverschiebungen eines Elements α mit der Länge $l_\alpha = p_\alpha l_0$ und der Biegesteifigkeit $K_{B\,\alpha} = q_\alpha K_{B\,0}$ sind wie folgt über die Elementsteifigkeitsmatrix verknüpft:

$$\begin{bmatrix} Q_L \\ M_L/l_0 \\ Q_R \\ M_R/l_0 \end{bmatrix} = \frac{K_{B\,0}}{l_0^3}\frac{q_\alpha}{p_\alpha^3}\begin{bmatrix} 12 & -6p_\alpha & -12 & -6p_\alpha \\ -6p_\alpha & 4p_\alpha^2 & 6p_\alpha & 2p_\alpha^2 \\ -12 & 6p_\alpha & 12 & 6p_\alpha \\ -6p_\alpha & 2p_\alpha^2 & 6p_\alpha & 4p_\alpha^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_L \\ \varphi_L\, l_0 \\ w_R \\ \varphi_R\, l_0 \end{bmatrix}$$



97. Für den skizzierten transversal schwingenden Balken mit Einzelmasse und federnder Lagerung gebe man mit Hilfe von Massen- und Steifigkeitsmatrizen die Bewegungsgleichungen für $w(x = \ell, t)$ und $\varphi(x = \ell, t)$ sowie die beiden kleinsten Eigenkreisfrequenzen an.

Geg.: $m = \dfrac{78}{420}\varrho A\ell, k = 4\dfrac{EI_{33}}{\ell^3}$