1. Eine runde, mit der Spannung σ eingespannte Membran mit dem Radius R und Dicke t hängt unter ihrem Eigengewicht (Masse pro Flächeneinheit sei λ) durch und schwingt um die Gleichgewichtslage.
Die Bewegungsgleichung ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes (zweidimensionale Wellengleichung) lautet:

$$\rho\ddot{w} = \sigma\Delta w,$$

wobei $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - der Laplace-Operator ist, ρ ist die Dichte.

a) Finden Sie die Bewegungsgleichung mit Berücksichtigung des Eigengewichtes.

b) Finden Sie die statische Auslenkung.
(Hinweis: der Laplace-Operator hat in rotationssymmetrischen Zylinderkoordinaten die Form:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$$

Mit den entsprechenden Randbedingungen kann dies integriert werden).

2. Die potentielle und kinetische Energie einer Membran sind:

$$K = \frac{1}{2}\rho h \iint \dot{w}^2 \mathrm{d}A$$

und

$$U = \frac{1}{2}\sigma h \iint (\nabla w)^2 \mathrm{d}A$$

a) Vereinfachen Sie diese Ausdrücke für den Fall, dass die Auslenkung nur vom Radius r abhängt!

b) Bestimmen Sie die erste Eigenfrequenz einer runden Membran mit Hilfe eines passenden Ritz-Ansatzes!

3. Ein Gefäß in Form einer Halbkugel mit dem Radius R liegt auf einer Gummimatte. Wenn es bis oben mit Wasser gefüllt ist, wird die Kontaktstelle zwischen dem Gefäß und der Matte undicht und das Wasser beginnt auszufließen. Zu bestimmen ist die Masse M der Halbkugel.