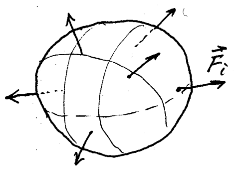
Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 3.

Das Kreuzprodukt von Vektoren. Der Momentenvektor. Allgemeine Kräftegruppen im Raum.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 3.2.1-3.2.2**

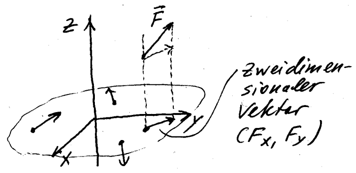
I. Gleichgewicht in drei Dimensionen



A. Kräftegleichgewicht

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0}$$

B. Momentengleichgewicht bezüglich aller drei Achsen.



Momentengleichgewicht bezüglich der z-Achse:

Die *z*-Komponente der Kraft ist ohne Bedeutung. Die *x*- und *y*-Komponenten können parallel verschoben werden, so dass sie in der Ebene (*x*,*y*) liegen. Nach solcher Transformation von allen Kräften lautet die Gleichgewichtsbedingung: $\sum_{i=1}^{n} \left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix} \right) = 0$.

Ähnliche Überlegungen für das Momentengleichgewicht bezüglich der x- und y-Achsen liefern

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy} \right) = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz} \right) = 0.$$

Diese Gleichgewichtsbedingungen kann man anders formulieren, indem man den Begriff der Kraftmomente bezüglich der x-, y- und z-Achsen einführt.

II. Kraftmoment bezüglich einer Achse

$M_z = xF_y - yF_x$: Kraftmoment bezüglich der z-Achse

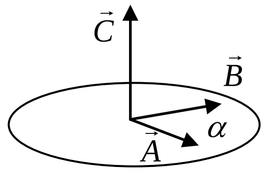
$M_x = yF_z - zF_y$: Kraftmoment bezüglich der x-Achse

$M_y = zF_x - xF_z$: Kraftmoment bezüglich der y-Achse

Die Gleichgewichtsbedingungen in drei Dimensionen lauten:

$$\boxed{\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0 \end{array}}$$

III. Vektor- oder Kreuzprodukt von zwei Vektoren



$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}}$$

1) Richtung: Achse senkrecht zu $\vec{A}$ *und* $\vec{B}$ + *Schraubenregel*

2) *Betrag:* $\left|\vec{C}\right| = AB\left|\sin\alpha\right|$

IV. Eigenschaften des Vektorproduktes

1) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ (*antikommutativ*)

2) $\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C} \right) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$.

3) Ist $\vec{A} \,||\, \vec{B}$, so ist $\vec{A} \times \vec{B} = 0$.

V. Koordinatendarstellung des Kreuzproduktes.

Zwei Vektoren seien durch ihre kartesischen Komponenten gegeben:

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z,$$

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z.$$

Zu berechnen ist das Kreuzprodukt

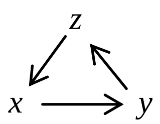
$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{A} \times \vec{B} \\ &= A_x B_x \left(\vec{e}_x \times \vec{e}_x \right) + A_x B_y \left(\vec{e}_x \times \vec{e}_y \right) + A_x B_z \left(\vec{e}_x \times \vec{e}_z \right) + \\ &\quad + A_y B_x \left(\vec{e}_y \times \vec{e}_x \right) + A_y B_y \left(\vec{e}_y \times \vec{e}_y \right) + A_y B_z \left(\vec{e}_y \times \vec{e}_z \right) + \\ &\quad + A_z B_x \left(\vec{e}_z \times \vec{e}_x \right) + A_z B_y \left(\vec{e}_z \times \vec{e}_y \right) + A_z B_z \left(\vec{e}_z \times \vec{e}_z \right) \\ &= \left(A_y B_z - A_z B_y \right) \vec{e}_x + \left(A_z B_x - A_x B_z \right) \vec{e}_y + \left(A_x B_y - A_y B_x \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Kartesische Komponenten dieses Vektors sind

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y,$$

$$C_y = A_z B_x - A_x B_z$$

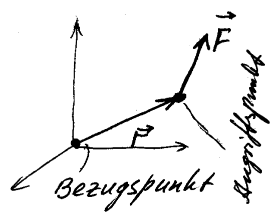
$$C_z = A_x B_y - A_y B_x$$



x,y,z-Achsen bilden ein *rechtes* Koordinatensystem

VI. Momentenvektor

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$



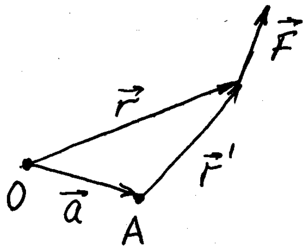
$$M_x = yF_z - zF_y$$

$$M_y = zF_x - xF_z$$

$$M_z = xF_y - yF_x$$

VII. Gleichgewichtsbedingungen in Vektorform $\sum \vec{F}_i = 0, \quad \sum \vec{M}_i = 0$.

VIII. Änderung des Momentenvektors bei einer Verschiebung des Bezugspunktes



Gegeben seien zwei Bezugspunkte O und A. Der Momentenvektor der Kraft $\vec{F}$ bezüglich des Punktes O ist

$$\vec{M}^{(O)} = \vec{r} \times \vec{F},$$

bezüglich des Punktes A: $\vec{M}^{(A)} = \vec{r}' \times \vec{F}$.
Dem Bild entnimmt man, dass $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$ ist.
Daraus folgt

$$\vec{M}^{(O)} = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r}' + \vec{a}) \times \vec{F} = \vec{r}' \times \vec{F} + \vec{a} \times \vec{F}$$

$$= \vec{M}^{(A)} + \vec{a} \times \vec{F}$$

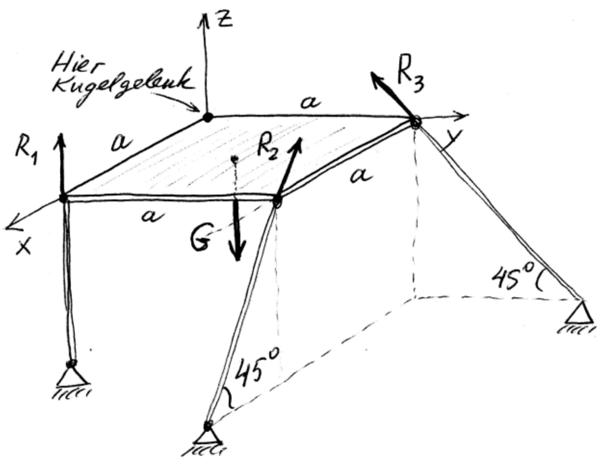
Greifen am Körper gleichzeitig mehrere Kräfte an, so haben wir für das Gesamtmoment

$$\sum \vec{M}_i^{(O)} = \sum \vec{M}_i^{(A)} + \sum \vec{a} \times \vec{F}_i$$

$$= \sum \vec{M}_i^{(A)} + \vec{a} \times \left(\sum \vec{F}_i\right).$$

Im Gleichgewicht ist die Summe aller Kräfte Null und das Kraftmoment hängt *nicht* von der Wahl des Bezugspunktes ab: $\sum \vec{M}_i^{(O)} = \sum \vec{M}_i^{(A)}$

B1. Eine Platte mit dem Gewicht G ist an einer Ecke mit einem Kugelgelenk befestigt und an drei anderen Ecken durch gelenkig gelagerte Stäbe unterstützt. Zu bestimmen sind die Stabkräfte.



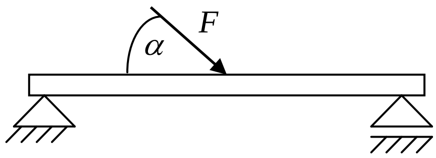
Lösung: Auf die Platte wirken: die Schwerkraft G, drei Stabreaktionskräfte (in der Richtung des jeweiligen Stabes) und eine Kraft mit im Allgemeinen allen drei kartesischen Komponenten im Kugelgelenk. Da wir uns für die Kräfte im Kugelgelenk nicht interessieren, reicht es, die drei Gleichungen für das Momentengleichgewicht aufzustellen. Dabei muss der Bezugspunkt im Koordinatenursprung gewählt werden (nur dann fallen die Gelenkkräfte aus den Momentengleichungen heraus).

Momentengleichgewicht:

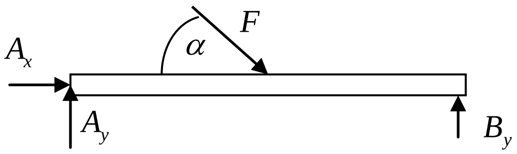
$$\left.\begin{aligned}
M_x^{(O)} &= -G\frac{a}{2} + R_2\frac{\sqrt{2}}{2}a + R_3\frac{\sqrt{2}}{2}a = 0\\
M_y^{(O)} &= -R_1 a + G\frac{a}{2} - R_2\frac{\sqrt{2}}{2}a = 0\\
M_z^{(O)} &= R_2\frac{\sqrt{2}}{2}a = 0
\end{aligned}\right\}$$

Daraus folgt: $R_2 = 0$, $R_1 = G/2$, $R_3 = G/\sqrt{2}$.

B2. In der Mitte eines Trägers, der links mit einem festen Gelenklager und rechts mit einem verschieblichen Gelenklager gelagert ist, greift eine Kraft F an. Die Wirkungslinie der Kraft bildet mit dem Träger den Winkel $\alpha = 45°$. Zu bestimmen sind die Auflagerreaktionen.



Freikörperbild:



Lösung: Das Kräftegleichgewicht liefert

$$\left.\begin{aligned}
&x: && A_x + F\cos\alpha = 0\\
&y: && A_y - F\sin\alpha + B_y = 0\\
&M^{(A)}: && -(F\sin\alpha)l/2 + B_y l = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Aus der letzten Gleichung folgt:
$B_y = (F\sin\alpha)/2$.

Aus der zweiten: $A_y = (F\sin\alpha)/2$.

Aus der ersten: $A_x = -F\cos\alpha$

B3. Ein Balken ist in einer Wand fest eingespannt und ist wie im vorigen Beispiel mit einer schräg gerichteten Kraft belastet. Zu bestimmen sind die Auflagerreaktionen.