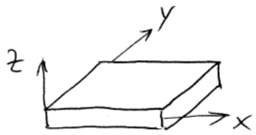
Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 23. **Teil 2: Elastostatik**

Ebener Spannungszustand. Hauptachsen und Hauptspannungen. Moorscher Spannungskreis.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 2.2., 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4**

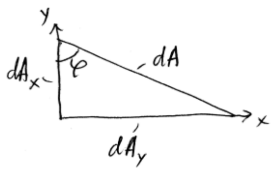
I. Ebener Spannungszustand

Betrachten wir eine homogene Platte, die nur in ihrer Ebene beansprucht wird (also auch im deformierten Zustand eben bleibt). Alle Kräfte an ihren Flächen sind Null. Das bedeutet, dass $\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = 0$. Aus der Symmetrieeigenschaft folgt: $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$:

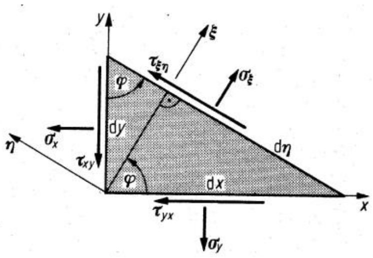


$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II. Koordinatentransformation



$$\boxed{\begin{aligned} dA_y &= dA \sin\varphi \\ dA_x &= dA \cos\varphi \end{aligned}}$$



Betrachten wir einen ebenen Spannungszustand und schneiden aus dem Medium ein infinitesimal kleines Dreieck. Betrachten wir das Kräftegleichgewicht in den Achsen (ξ, η), die relativ zu den Achsen (x, y) um den Winkel φ gedreht sind:

$$\xi: \quad \begin{aligned} &\sigma_\xi dA - \left(\sigma_y dA_y\right)\sin\varphi - \left(\tau_{yx} dA_y\right)\cos\varphi \\ &-\left(\sigma_x dA_x\right)\cos\varphi - \left(\tau_{xy} dA_x\right)\sin\varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\eta: \quad \begin{aligned} &\tau_{\xi\eta} dA - \left(\sigma_y dA_y\right)\cos\varphi + \left(\tau_{yx} dA_y\right)\sin\varphi \\ &+\left(\sigma_x dA_x\right)\sin\varphi - \left(\tau_{xy} dA_x\right)\cos\varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sigma_\xi = \sigma_y \sin^2\varphi + \tau_{yx}\sin\varphi\cos\varphi + \sigma_x\cos^2\varphi + \tau_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \\ \tau_{\xi\eta} = \sigma_y \sin\varphi\cos\varphi - \tau_{yx}\sin^2\varphi - \sigma_x \sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy}\cos^2\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_\xi = \sigma_y \sin^2\varphi + 2\tau_{yx}\sin\varphi\cos\varphi + \sigma_x\cos^2\varphi \\ \tau_{\xi\eta} = -\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \\ \sigma_\eta = \sigma_y\cos^2\varphi - 2\tau_{yx}\sin\varphi\cos\varphi + \sigma_x\sin^2\varphi \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_\xi &= \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\varphi + \tau_{yx}\sin 2\varphi \\ \sigma_\eta &= \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) - \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\varphi - \tau_{yx}\sin 2\varphi \\ \tau_{\xi\eta} &= -\tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \end{aligned}}$$

Schlussfolgerungen:

1. Die vier Komponenten des Spannungstensors (in 2D) und 9 (in 3D) bestimmen vollständig den Spannungszustand.

2. Es gibt Invarianten des Spannungstensors:

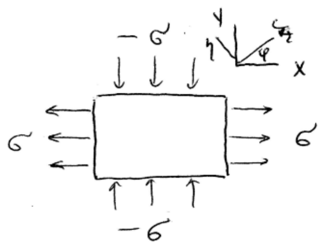
$I_1 = \sigma_x + \sigma_y$ (Spur der Matrix)

$I_2 = \sigma^2{}_x + \tau^2{}_{xy} + \tau^2{}_{yx} + \sigma^2{}_y$.

B1. In einem Koordinatensystem gilt $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, $\tau_{xy} = 0$. Zu bestimmen ist der Spannungszustand in einem beliebig orientierten Koordinatensystem.

Lösung: $\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sigma$, $\tau_{\xi\eta} = 0$. Diesen Spannungszustand nennt man *hydrostatischen Spannungszustand.*

B2. Ein Block ist in einer Richtung auf Zug und in Querrichtung auf Druck mit der gleichen Spannung σ belastet. Zu bestimmen ist der Spannungstensor in einem beliebig orientierten Koordinatensystem.



Lösung: $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = -\sigma$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$

$\sigma_\xi = \sigma\cos 2\varphi$, $\sigma_\eta = -\sigma\cos 2\varphi$,

$\tau_{\xi\eta} = -\sigma\sin 2\varphi$.

Für $\varphi = \pi/4$ ist $\sigma_\xi = 0$, $\sigma_\eta = 0$, und

$\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi} = -\sigma$.

Im Koordinatensystem (*x*,*y*) ist das Material auf Zug und Druck beansprucht, im System (ξ, η) ist das reiner Schub.

B3. Ein Material wird auf reinen Schub beansprucht. Zu bestimmen ist der Spannungstensor in einem beliebig orientierten System.

Lösung: $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$.

$\sigma_\xi = \tau\sin 2\varphi$, $\sigma_\eta = -\tau\sin 2\varphi$, $\tau_{\xi\eta} = \tau\cos 2\varphi$.

Für $\varphi = \pi/4$ gilt $\tau_{\xi\eta} = 0$, $\sigma_\xi = \tau$, $\sigma_\eta = -\tau$.

B4. Eine Säule ist auf Druck belastet ($\sigma_x = -\sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$). In welchem Querschnitt ist die Schubspannung maximal?

$\tau = \left(-\sigma/2\right)\sin 2\varphi$. $\varphi = 45°$ (Bruchwinkel spröder Stoffe unter Druck).

III. Hauptachsen und Hauptspannungen

1. Man kann die Achsen immer so wählen, dass die Schubspannungen verschwinden. Gleichzeitig nehmen die Zugspannungen (Diagonalkomponenten) ihren extremalen Wert an:

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

2. Andererseits gibt es immer Achsenrichtungen, bei denen die Schubspannungen ein Maximum erreichen:

$$\frac{d\tau_{\xi\eta}}{d\varphi} = -\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\tilde{\varphi} - 2\tau_{xy}\sin 2\tilde{\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \cot 2\tilde{\varphi} = -\frac{2\tau_{xy}}{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)} = -\tan 2\varphi^*$$

Dafür muss offenbar gelten: $2\tilde{\varphi} = 2\varphi^* + \pi/2$.
In der Tat gilt

$\cos 2\tilde{\varphi} = \cos\left(2\varphi^* + \pi/2\right) = -\sin\left(2\varphi^*\right)$,

$\sin 2\tilde{\varphi} = \sin\left(2\varphi^* + \pi/2\right) = \cos\left(2\varphi^*\right)$ und

$\cot 2\tilde{\varphi} = -\tan 2\varphi^*$.

Die Achsenrichtungen, in denen die Schubspannungen maximal sind, sind zu den Hauptachsen um 45° gedreht. Die Extremalwerte der Schubspannung heißen **Hauptschubspannungen:**

$$\boxed{\tau_{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}.$$

Mit Hilfe der Hauptspannungen gilt:

$$\boxed{\tau_{\max} = \pm\frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)}.$$

Dabei sind die Normalspannungen

$\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)$.

IV. Mohrscher Spannungskreis

Schreibt man die Transformationsformeln um:

$$\sigma_\xi - \tfrac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right) = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_y - \sigma_x\right)\cos 2\varphi + \tau_{yx}\sin 2\varphi$$

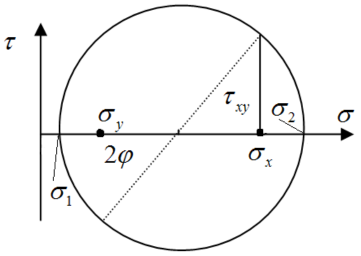
$$\tau_{\xi\eta} = -\tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi,$$

so kann durch Quadrieren und Addieren der Winkel φ eliminiert werden:

$$\left[\sigma_\xi - \tfrac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right]^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

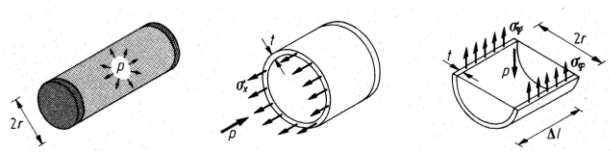
Den Ausdruck auf der rechten Seite bezeichnen wir als $\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = r^2$ und den Mittelwert der Diagonalspannungen als $\sigma_M = \frac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right)$. Somit gilt für σ_ξ und $\tau_{\xi\eta}$: $\left[\sigma_\xi - \sigma_M\right]^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = r^2$. Im Weiteren lassen wie die Indizes aus: $\left[\sigma - \sigma_M\right]^2 + \tau^2 = r^2$.

Dies ist die Gleichung eines Kreises in der (σ, τ)-Ebene mit dem Zentrum im Punkt σ_M und dem Radius r. Dese Überlegungen können zur grafischen Bestimmung von Hautspannungen, maximalen Schubspannungen und Hauptachsen benutzt werden. So geht es: Gegeben seien σ_x, σ_y und τ_{xy}. Der Punkt (σ_x, τ_{xy}) liegt auf dem Kreis, der Punkt $(\sigma_M, 0)$ liegt in der Mitte des Kreises, somit ist der gesamte Kreis eindeutig bestimmt. An dem Kreis können jetzt problemlos die Hauptspannungen und die maximale Schubspannung abgelesen werden.



V. Dünnwandiger Kessel

Ein dünnwandiger zylindrischer Kessel mit dem Radius *r* und der Wandstärke *t* stehe unter dem Druck *p*. Zu ermitteln ist der Spannungszustand.



Ein Schnitt senkrecht zur Achse ergibt :

$$\sigma_x 2\pi r t - p\pi r^2 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\sigma_x = \frac{pr}{2t}}.$$

Ein Schnitt entlang der Achse ergibt:

$$2\sigma_\varphi t\Delta l - p2r\Delta l = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\sigma_\varphi = \frac{pr}{t}}$$

Wegen $r \gg t$ gilt $\sigma_x, \sigma_\varphi \gg \sigma_r$. Der Spannungszustand kann daher als eben betrachtet werden. Die maximale Schubspannung ist

$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right) = \frac{pr}{4t}$, sie wirkt in Schnitten unter 45° zur Achse. Plastische Deformation wird daher in Richtung 45° initiiert werden.