Spannungen im gebogenen Balken. Biegung und Längskraft.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.4., 4.8**

I. Spannungsverteilung im Balken

Bei der Herleitung der Balkengleichung haben wir festgestellt, dass die Zugspannungen im Balken gleich $\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{y}{R}$ sind, wobei y eine Koordinate senkrecht zur Balkenachse, gezählt von der neutralen Fläche, ist. Andererseits folgt aus der Balkengleichung $M_z = -\dfrac{EI_z}{R}$. Daraus folgt $\dfrac{1}{R} = -\dfrac{M_z}{EI_z}$ und

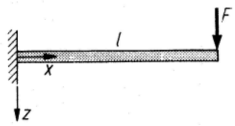
$$\boxed{\sigma = -\frac{M_z}{I_z}y}.$$

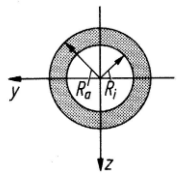
Maximale Spannungen werden erreicht in den Punkten, die am weitesten von der neutralen Fläche entfernt liegen. Wenn der maximale Abstand von der neutralen Fläche $y_{\max}$ ist, so ist die maximale Spannung gleich

$$\boxed{|\sigma_{\max}| = \left|\frac{M_z}{I_z}y_{\max}\right| = \frac{|M_z|}{W}}.$$

Die Größe $W = I_z/|y_{\max}|$ heißt *Widerstandsmoment.*

B1. Ein Rohr ($R_a = 5\,\mathrm{cm}$, $R_i = 4\,\mathrm{cm}$, $l = 3\,\mathrm{m}$) ist links eingespannt. Wir groß darf die am anderen Ende angreifende Kraft F sein, damit die zulässige Spannung den Wert $\sigma_{zul} = 150\,\mathrm{MPa}$ nicht überschreitet?





Lösung: Das maximale Biegemoment wirkt an der Einspannstelle und ist gleich $M_{\max} = lF$. Die maximale Spannung $|\sigma_{\max}| = \dfrac{|M_{\max}|}{W}$ muss die Bedingung $|\sigma_{\max}| = \dfrac{lF}{W} \le \sigma_{zul}$ erfüllen, wobei

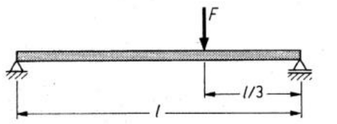
$$W = \frac{I_z}{|y_{\max}|} = \frac{\pi\left(R_a^4 - R_i^4\right)}{4R_a} = 5{,}8\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \text{ gilt.}$$

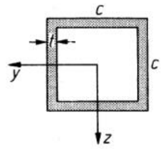
Daraus folgt

$$F \le \frac{W\sigma_{zul}}{l} = \frac{5{,}8\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3 \cdot 150\cdot 10^6\,\mathrm{N/m}^2}{3\mathrm{m}}$$

$$\approx 2{,}9\cdot 10^3\,\mathrm{N}.$$

B2. Ein dünnwandiger Kastenträger (konstante Wandstärke $t = 15\,\mathrm{mm}$, Länge $L = 10\,\mathrm{m}$) soll die Last $F = 200\,\mathrm{kN}$ tragen. Wie groß muss die Seitenlänge mindestens sein, damit die zulässige Spannung $\sigma_{zul} = 200\,\mathrm{MPa}$ nicht überschritten wird?





Lösung: Ist ein Balken beidseitig gelenkig gelagert, so tritt das größte Biegemoment im Angriffspunkt der Kraft auf. Es ist gleich $M_{\max} = \dfrac{2}{9}lF$. Das Trägheitsmoment des dünnwandigen Querschnitts ist $I = \dfrac{2}{3}c^3 t$.

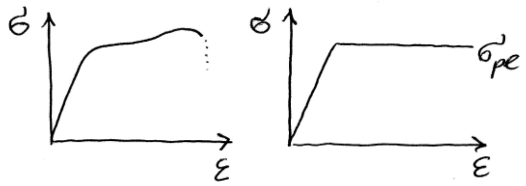
Das Widerstandsmoment ist somit $W = \dfrac{I}{|y_{\max}|} = \dfrac{(2/3)c^3 t}{c/2} = \dfrac{4}{3}tc^2$.

Die geforderte Bedingung lautet:

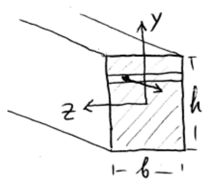
$|\sigma_{\max}| = \dfrac{|M_{\max}|}{W} \le \sigma_{zul}$ oder $\dfrac{lF}{6tc^2} \le \sigma_{zul}$.

$$\Rightarrow c \ge \sqrt{\frac{lF}{6t\sigma_{zul}}} \approx 0{,}333\,\mathrm{m}$$

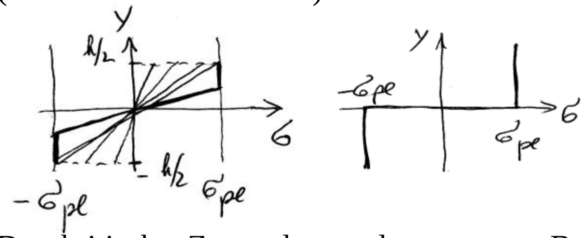
II. Was passiert, wenn die kritische Spannung überschritten wird?



Das reale Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines metallischen Werkstoffs (links) wird oft näherungsweise durch das Modell eines "elastisch-ideal plastischen" Mediums ersetzt. Nach diesem Modell steigt die Spannung zunächst linear nach dem Hookeschen Gesetz. Nach Erreichen einer kritischen Spannung σ_{pl} ändert sich die Spannung bei weiterer Deformation nicht mehr. Im elastischen Bereich ist die Spannung gleich $\sigma = Ey/R$. Sie erreicht ihr Maximum bei



$y = \pm h/2$. Danach ändert sie sich nicht mehr (s. untenstehende Skizze).



Der kritische Zustand, wo das gesamte Balkenvolumen plastisch deformiert ist, ist auf der nächsten Skizze gezeigt. Das in diesem Zustand wirkende Moment berechnet sich zu

$$M_p = \int y\,\mathrm{d}F = \int y\sigma\,\mathrm{d}A = 2\int_0^{h/2} y\sigma_{pl}\mathrm{d}A = 2\int_0^{h/2} y\sigma_{pl} b\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\sigma_{pl} b \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\sigma_{pl} bh^2.$$

Zum Vergleich berechnen wir das Kraftmoment im Zustand, wo die Spannung erst an einem einzigen Punkt den kritischen Wert erreicht hat.

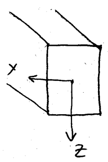
$$M_c = \int y\sigma_{el}\,\mathrm{d}A = 2\int_0^{h/2} y\frac{y\sigma_{pl}}{h/2}\mathrm{d}A = \frac{1}{6}\sigma_{pl} bh^2.$$

Wir sehen, dass $M_p = 1{,}5 M_c$. Es gibt also zwei kritische Beigemomente:

M_c ("elastisches Versagen"),

M_p ("plastisches Versagen").

III. Biegung und Längskraft



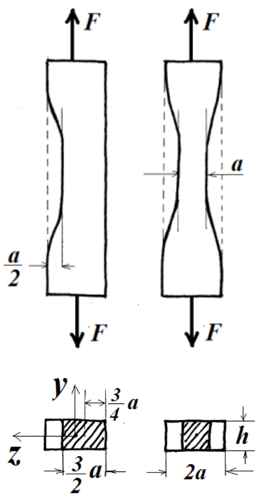
Betrachten wir wieder einen Balken mit einem symmetrischen Profil. Wird er mit einem Kraftmoment M_y belastet, so wird die Spannungsverteilung im Querschnitt durch $\sigma = \frac{M_y}{I_y} z$ gegeben. Bei einer Belastung mit einem Kraftmoment M_z ist die Spannungsverteilung $\sigma = -\frac{M_z}{I_z} y$. Ist der Balken mit einer Normalkraft N belastet (in axialer Richtung), so ist die Zugspannung im Querschnitt homogen und gleich $\sigma = \frac{N}{A}$. Wirken gleichzeitig beide Momente und Normalkraft, so erhält man die Spannung als Summe von drei o.g. Beiträgen (Superpositionsprinzip):

$$\boxed{\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{N}{A}}$$

Die Lage der neutralen Fläche bestimmt sich aus der Forderung $\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{N}{A} = 0$.

Ist $N = 0$, so ist das eine Gerade $z = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} y$ durch den Koordinatenursprung (Schwerpunkt des Querschnitts). Ist $N \neq 0$, so ist das eine verschobene Gerade $z = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} y - \frac{N I_y}{M_y A}$.

B3. Proben mit symmetrischer und nicht symmetrischer Verjüngung:



Zu vergleichen sind die maximalen Zugspannungen, die im Querschnitt von nebenstehend skizzierten Proben wirken.

Lösung: Die rechte Probe ist symmetrisch beansprucht, so daß nur reine homogene Zugspannung vorliegt und die Spannung sich einfach als Verhältnis der Kraft zur Querschnittsfläche berechnet: $\boxed{\sigma_{\max}^{rechts} = F/ah}$.

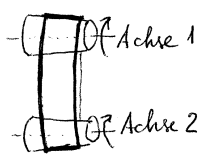
Die linke Probe dagegen ist nicht symmetrisch beansprucht. Bezüglich des Schwerpunkts des verjüngten Querschnitts hat die Kraft $\vec{F}$ ein Moment: $M_y = Fa/4$. Die Spannungen im Querschnitt setzen sich daher zusammen aus den Zugspannungen durch die Kraft $\vec{F}$ und den Zugspannungen durch Biegung mit dem Moment $M_y = Fa/4$. Die letzten erreichen ihr Maximum an der Oberfläche der Probe (im Abstand $\frac{3}{4}a$ vom Schwerpunkt des Querschnitts). Die maximale Spannung ist daher gleich

$$\sigma_{\max}^{links} = \frac{F}{\frac{3}{2}ah} + \frac{M_y}{I_y}\frac{3}{4}a = \frac{2F}{3ah} + \frac{12Fa}{4h\left(\frac{3}{2}a\right)^3}\frac{3}{4}a =$$

$$= \frac{2F}{3ah} + \frac{2F}{3ah} = \boxed{\frac{4F}{3ah}}$$

Sie ist trotz des größeren Querschnitts größer als bei der symmetrischen Probe.

IV. Riemen als Balken



Auch Objekte, die keinen Druck aushalten, können als Balken behandelt werden, wenn sie so gespannt sind, dass an keinem Punkt Druckspannungen wirken.