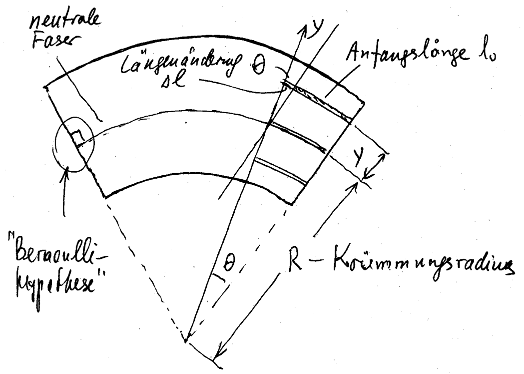
Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 16. **Teil 2: Elastostatik**

Balkenbiegung.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.1., 4.3**

I. Biegemoment in einem gebogenen Balken

Wird ein Balken gebogen, so wird das Material auf der inneren Seite der Kurve gestaucht und an der äußeren Seite gedehnt. Dazwischen muss eine "neutrale Fläche" liegen, auf der das Material nicht gedehnt ist.



Bei einer *reinen Biegung* (unter der Wirkung von Biegemomenten) stehen die Querschnitte senkrecht zur Balkenachse (neutraler Faser). Bei einer Biegung unter der Wirkung einer Querkraft ist diese Bedingung für *schlanke Balken* eine gute Näherung (Bernoulli-Hypothese).

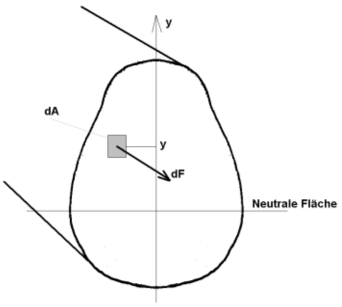
Wir betrachten ein infinitesimal kleines Element des Balkens, das vom Krümmungszentrum aus gesehen, das Winkelmaß θ hat. Diese wird in dünne Streifen parallel zur Balkenachse unterteilt. Für einen solchen Streifen mit der Koordinate y (gemessen von der neutralen Faser) kann man der Skizze folgende Zusammenhänge entnehmen:

Anfangslänge $l_0 = R\theta$,

Längenänderung $\Delta l = y\theta$.

Daraus ergibt sich für die Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{y}{R}$$



Die Zugspannung ergibt sich nach dem Hookeschen Gesetz zu

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{R}.$$

Die in dem Querschnitt wirkende Gesamtkraft ist

$$N = \int\limits_{Querschnitt} \mathrm{d}F = \frac{E}{R}\int y\,\mathrm{d}A. \qquad (1)$$

Das Moment einer einzelnen Kraft dF ist gleich

$$\mathrm{d}M_z = -\mathrm{d}F\cdot \underbrace{y}_{Hebelarm} = -\frac{E}{R}y^2\mathrm{d}A$$

und das Gesamtmoment daher

$$M_z = \int \mathrm{d}M_z = -\frac{E}{R}\int y^2\mathrm{d}A. \qquad (2)$$

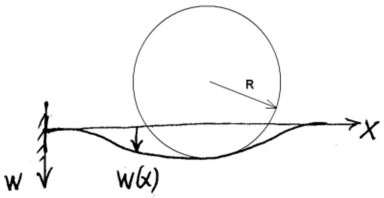
Aber: Wo liegt die neutrale Fläche? (Bisher haben wir eine willkürliche Lage gewählt).
Die Lage der neutralen Fläche wird durch (1) bestimmt. Bei einer reinen Biegung (ohne Längskraft) gilt: $N = 0$, d.h. $\int y\,\mathrm{d}A = 0$. Das bedeutet, dass die neutrale Fläche *durch den Schwerpunkt des Querschnittes* geht.
(Das folgt aus der Definition der Schwerpunktkoordinate $y_s = \frac{\int y\,\mathrm{d}A}{\int \mathrm{d}A}$).

Die Größe $\boxed{I_z = \int y^2 dA}$ nennt man *Flächenträgheitsmoment des Querschnitts bezüglich der z-Achse.* Damit ergibt sich für das Biegemoment (2) die folgende Grundgleichung der Balkentheorie

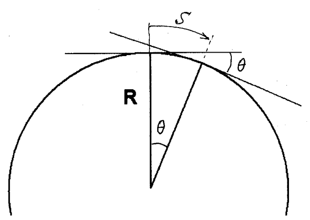
$$\boxed{M_z = -\frac{EI_z}{R}}$$

II. Elastische Biegelinie

A. Ein bisschen Geometrie:



Bei einem gebogenen Balken kann man in jedem Punkt den lokalen Krümmungsradius definieren. Der Krümmungsradius lässt sich analytisch berechnen.

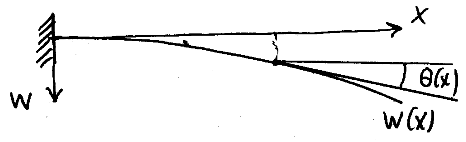


Zu diesem Zweck untersuchen wir die Drehung der Tangente zu einem Kreis:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R}.$$

Daraus folgt, dass $\frac{1}{R} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$. Bei nicht konstanten Krümmung $\frac{1}{R} = \frac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s}$.

Für einen Balken mit der Biegelinie $w(x)$ gilt



$\theta(x) \approx \tan\theta(x) = \dfrac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x} = w'(x)$, und

$s \approx x \quad \Rightarrow$

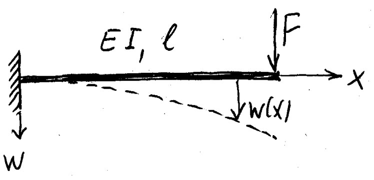
$$\frac{1}{R} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \approx \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}w}{Ex}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = w''(x).$$

Für das Biegemoment ergibt sich somit

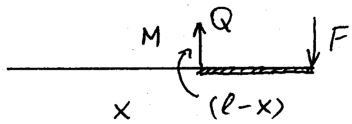
$$\boxed{M_z = -\frac{EI_z}{R} = -EI_z w''(x)}$$

"Balken-Gleichung"

III. Klassisches Beispiel: Biegung eines Kragbalkens unter einer an seinem Ende angreifenden Kraft



Zunächst machen wir eine Freischnittsskizze und bestimmen den Verlauf der Schnittlasten:



$Q = F$,

$M = -F(l - x)$.

Aus der Balkengleichung folgt

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{F(l-x)}{EI}.$$

Die erste Integration ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \int \frac{F(l-x)}{EI}\mathrm{d}x + C_1 = \frac{F}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1.$$

Die zweite Integration ergibt:

$$w(x) = \int\left[\frac{F}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1\right]\mathrm{d}x + C_2$$

$$= \frac{F}{EI}\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1 x + C_2.$$

Randbedingungen:

Tabelle 4.2. Randbedingungen

Lager	w	w'	M	Q
gelenkiges Lager	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$
Parallelführung	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0
Einspannung	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$
freies Ende	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0

Bei der Einspannung gilt:

$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$.

Daraus folgt: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$

und die Biegelinie ist daher:

$$\boxed{w(x) = \frac{Fl}{EI}\frac{x^2}{2} - \frac{F}{EI}\frac{x^3}{6}}$$

Absenkung des Angriffspunktes der Kraft:

$$\boxed{w(l) = \frac{Fl^3}{3EI}}.$$

Federsteifigkeit einer Blattfeder:

$$c = \frac{F}{w(l)} = \frac{3EI}{l^3}$$

IV. Balken unter einer Streckenlast

Bei einer kontinuierlich verteilten Kraft $q(x)$ gilt für das Biegemoment die Differentialgleichung der Schnittlasten:

$$\frac{\mathrm{d}^2 M(x)}{\mathrm{d}x^2} = -q(x).$$

Die Balkengleichung lautet: $M(x) = -EI_z w''(x)$.

Indem wir diese Gleichung zweimal differenzieren und die Differentialgleichung für das Moment verwenden, erhalten wir:

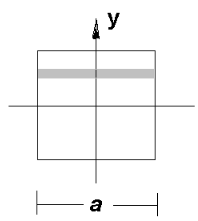
$$\boxed{\left(EI_z w''(x)\right)'' = q(x)}$$

(Balkendifferentialgleichung 4. Ordnung)

Für einen homogenen Balken vereinfacht sie sich zu

$EI_z w^{IV}(x) = q(x)$.

V. Flächenträgheitsmoment eines Balkens mit einem quadratischen Querschnitt



$$I_z = \int y^2 \mathrm{d}A = \int_{-a/2}^{a/2} y^2 a \mathrm{d}y$$

$$= a\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-a/2}^{a/2} = 2a\frac{a^3}{3\cdot 8} = \frac{a^4}{12}$$

Damit ist Federsteifigkeit einer "Balkenfeder" mit einem quadratischen Querschnitt:

$$c = \frac{3EI}{l^3} = \frac{Ea^4}{4l^3}$$