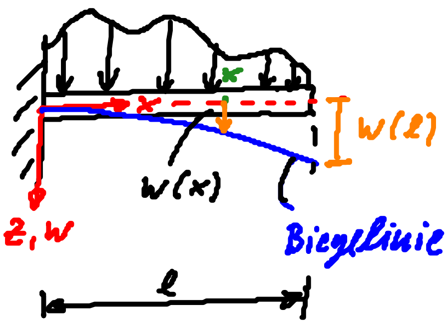
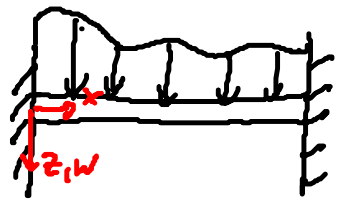
18. Vorlesung:

Themen:
- Biegeliniendifferenzialgleichung 4. Ordnung
- Berechnung statisch <u>unbestimmter</u> Systeme

Motivation:



Durchsenkung am Ende



Gesucht: $w(x)$, <u>Schnittlasten</u>!

<u>Problem</u>: Statisch unbestimmt!

Wie sollen wir $Q(x)$ und $M(x)$ ermitteln?

Was kennen wir?

Schnittlastendgl.:

$$Q'(x) = -q(x) \quad (1)$$
$$M'(x) = Q(x) \quad (2)$$

Nur anwendbar zur direkten Lsg. von statisch bestimmten Systemen!

Material-Struktur-Glg:

$$\underbrace{M(x)}_{\text{dynamische Größe}} = -E J_y(x)\, \underbrace{w''(x)}_{\text{geometr. Größe}} \quad (3)$$

Aus (1) und (2) $\Rightarrow$ $M'(x) = Q(x) \quad // \; (\,)'$

$$M''(x) = Q'(x) = -q(x) \quad (4)$$

Einsetzen von (3) $\Rightarrow$ $\left[-\underbrace{E J_y(x)\, w''(x)}\right]'' = -q(x)$

$$\boxed{[E J_y(x)\, w''(x)]'' = q(x)}$$ Biegeliniendgl. 4. Ordnung!

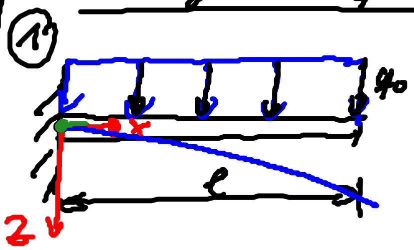
Sonderfall: $E J_y(x) = \text{const.}$

$$\boxed{E J_y\, w^{IV} = q(x)} \quad (*)$$

Beispiele

I. 3 Systeme, verschiedene Lagerungen aber gleiches $q(x)$

(1)



$q(x) = q_0$

Statisch bestimmt!

Gesucht: $w(x)$

1. Idee: Berechnung von $M(x)$ [Sdgl. oder Gleichschnittverfahren]
$\Rightarrow M(x)$
Einsetzen in $M(x) = -EJ\, w''(x)$ und 2x Integrieren!

2. Idee: Meist einfacher! Wir nutzen (*)

$$E J_y\, w^{IV}(x) = q(x) = q_0 = \text{const.}$$

4x Integrieren:

$$-Q(x) = E J_y\, w'''(x) = q_0 \cdot x + C_1$$
$$-M(x) = E J_y\, w''(x) = \tfrac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2$$
$$E J_y\, w'(x) = \tfrac{1}{6} q_0 x^3 + C_1 \tfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$
$$E J_y\, w(x) = \tfrac{1}{24} q_0 x^4 + C_1 \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 \cdot x + C_4$$

Berechnung der Integrationskonstanten aus den physikalischen/dynamischen und geometrischen Randbedingungen:

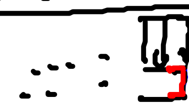
I $w(0) = 0$
II $w'(0) = 0$ } geometrisch

dynamisch {
III $M(l) = 0 \Rightarrow -EJ\, w''(l) = 0 \Rightarrow EJ\, w''(l) = 0$ $[w''(l) = 0]$
IV $Q(l) = 0 \Rightarrow -EJ_y\, w'''(l) = 0 \Rightarrow EJ\, w'''(l) = 0 \Rightarrow w'''(l) = 0$

N.R.: $Q(x) = M'(x) = (-EJ\, w''(x))' = -EJ\, w'''(x)$

Bestimmung von $C_1 - C_4$:

Freies Ende $x = l$:



Freies Ende also positives Ufer interpretierbar!

Am freien Ende gibt es weder Querkraft noch Moment, es sei denn dort wirken eingeprägte Kraftgrößen (z.B. F, M_0)

Studentenfreundliche Version
Freischnitt eines super-kleinen

$\mathrm{I} \Rightarrow \underline{C_4 = 0}$

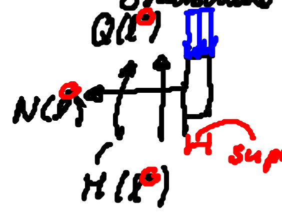
$\mathrm{II} \Rightarrow \underline{C_3 = 0}$

$\mathrm{III} \Rightarrow \frac{1}{2} q_0 l^2 + C_1 l + C_2 = 0$

$\mathrm{IV} \Rightarrow q_0 \cdot l + C_1 = 0 \Rightarrow \underline{C_1 = -q_0 \cdot l}$

$\overset{\mathrm{III}}{\Rightarrow} \underline{C_2 = \frac{1}{2} q_0 l^2}$

Schnittufer am Ende:



$\sum M_S = 0 \Rightarrow -M(l) = 0$

$\sum F_z = 0 \Rightarrow -Q(l) = 0$

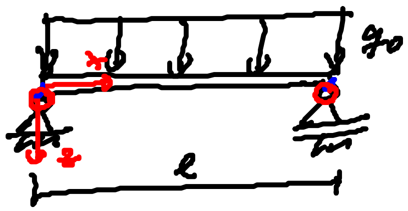
$$\Rightarrow w(x) = \frac{1}{EI_y}\left[\frac{1}{24} q_0 x^4 - q_0 l \frac{x^3}{6} + \frac{1}{4} q_0 l^2 \cdot x^2\right]$$

$$\underline{w(x) = \frac{q_0}{24 EI_y}\left[x^4 - 4 l x^3 + 6 l^2 x^2\right]}$$

Maximale Durchbiegung: hier am Ende!

$$w_{max} = w(l) = \frac{q_0}{24 EI_y}\left[l^4 - 4 l^4 + 6 l^4\right] = \underline{\underline{\frac{q_0 l^4}{8 EI_y}}}$$

2



$q(x) = q_0$

Statisch bestimmt!

$EI_y w'''(x) = q_0 x + C_1$

$EI_y w''(x) = \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2$

$EI_y w'(x) = \frac{1}{6} q_0 x^3 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$

$EI_y w(x) = \frac{1}{24} q_0 x^4 + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$

Einfacher: $EI_y w^{IV}(x) = q(x) = q_0$

Integration genauso wie vorher!

Aber andere Randbedingungen $\Rightarrow$ andere $C_1, \dots, C_4$!

Randbedingungen:

$\left.\begin{array}{l} \mathrm{I}\ w(0) = 0 \\ \mathrm{II}\ w(l) = 0 \end{array}\right\}$ geometrische $\Rightarrow \underline{C_4 = 0}$

$\left.\begin{array}{l} \mathrm{III}\ \underline{M(0) = 0} \Rightarrow w''(0) = 0 \\ \mathrm{IV}\ M(l) = 0 \Rightarrow w''(l) = 0 \end{array}\right\}$ dynamische! $\Rightarrow \underline{C_2 = 0}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} q_0 l^2 + C_1 \cdot l = 0$

$\underline{C_1 = -\frac{1}{2} q_0 l}$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{24} q_0 l^4 \underbrace{- \frac{1}{2} q_0 \cdot l}_{= C_1} \frac{l^3}{6} + C_3 \cdot l = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C_3 = \frac{1}{24} q_0 l^3}}$$

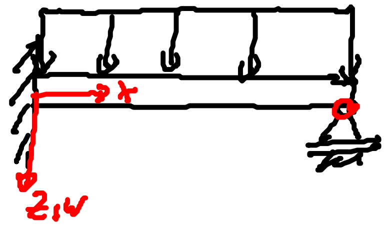
Einsetzen ergibt: $w(x) = \frac{1}{EI_y}\left[\frac{1}{24} q_0 x^4 - \frac{1}{2} q_0 l \frac{x^3}{6} + \frac{1}{24} q_0 l^3 x\right]$

$$\underline{\underline{w(x) = \frac{q_0}{24 EI_y}\left[x^4 - 2 l x^3 + l^3 x\right]}}$$

Maximale Durchsenkung:

$$w_{max} = w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q_0}{24 E J_y}\left[\underbrace{\left(\frac{l}{2}\right)^4 - 2l\left(\frac{l}{2}\right)^3 + l^3\frac{l}{2}}_{\left(\frac{1}{16} - 2\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) l^4}\right] = \frac{5 q_0 l^4}{384 E J_y}$$

3.7



$q(x) = q_0$!

Achtung! Statisch unbestimmt!!!

Dennoch!... können wir die Biegeliniendgl. 4. Ordnung problemlos lösen!

$$EJ w^{IV}(x) = q(x) = q_0$$

$$\vdots$$

Randbedingungen: I $w(0) = 0$, II $w'(0) = 0$ } geom.

III $w(l) = 0$ } geom.

IV $M(l) = 0 \Rightarrow w''(l) = 0$ } dyn!

---- nach kurzer Rechnung:

$$w(x) = \frac{q_0}{E J_y}\left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{5}{48} l x^3 + \frac{1}{16} l^2 x^2\right]$$

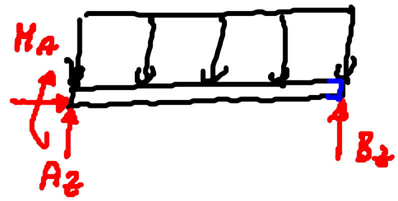
$M(x) = ?$

$$M(x) = -E J_y w''(x) = -\cancel{E J_y}\,\frac{q_0}{\cancel{E J_y}}\left[\frac{4}{24}x^3 - \frac{15}{48} l x^2 + \frac{2}{16} l^2 x\right]'$$

$$= -q_0\left[\frac{12}{24}x^2 - \frac{30}{48} l x + \frac{1}{8} l^2\right]$$

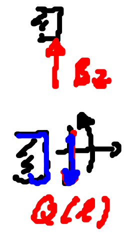
$$= -q_0\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{8} l x + \frac{1}{8} l^2\right]$$

$$Q(x) = M'(x) = -q_0\left[\cancel{x} - \frac{5}{8}\ell\right]$$



Lagerreaktionen:

$$B_z = -Q(\ell) = -\left[-q_0\left(\ell - \frac{5}{8}\ell\right)\right] = \frac{3}{8} q_0 \ell$$



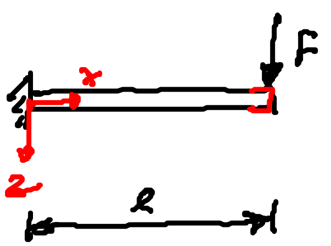
positives Ufer

$$M_A = M(0) = -\frac{1}{8} q_0 \ell^2$$

$$A_z = Q(0) = \frac{5}{8} q_0 \ell$$

negatives Ufer

4.)



$w(x) = ?$

Randbedingungen:

I $w(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

II $w'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

III $Q(\ell) = F$

IV $M(\ell) = 0$

$-EJw'''(\ell) = F$

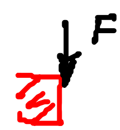
$$EJ_y w^{IV}(x) = q(x) = 0$$

$$\boxed{EJ_y w'''(x)} = C_1$$

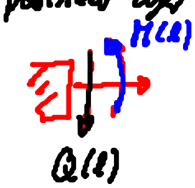
$$EJ_y w''(x) = C_1 \cdot x + C_2$$

$$EJ_y w'(x) = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 \cdot x + C_3$$

$$EJ_y w(x) = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$



positives Ufer



so würden wir das Ufer freischneiden!

aus IV $\Rightarrow -EJ w''(\ell) = 0 \Rightarrow EJ w''(\ell) = 0$

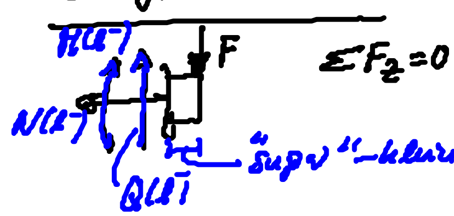
$\Rightarrow C_1 \cdot \ell + C_2 = 0$

aus III $\Rightarrow -EJ_y w'''(\ell) = F$

$$EJ_y w'''(\ell) = -F$$

$$C_1 = -F \Rightarrow C_2 = -C_1 \cdot \ell = F \cdot \ell$$

St. freundl. Version



$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow -Q(\ell) + F = 0$

$Q(\ell) = F$

$\Sigma M = 0 \Rightarrow M(\ell) = 0$

$$w(x) = \frac{1}{EJ_y}\left[-\frac{1}{6}Fx^3 + \frac{1}{2}F\cdot l x^2\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{Fx^2}{EJ_y}\left[-\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}l\right]}} \quad ||$$

Warum? Das superkleine Stückchen geht gegen Null!

Durchbiegung am Ende: $\boxed{w(l) = \frac{Fl^2}{EJ_y}\left[-\frac{1}{6}l + \frac{1}{2}l\right] = \frac{Fl^3}{3EJ_y}}$

Neigung am Ende: $w'(l)$

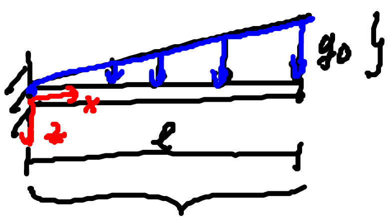
$$w'(x) = \frac{1}{EJ_y}\left[\frac{1}{2}(-F)x^2 + F\cdot l x\right]$$

$$w'(x) = \frac{Fx}{EJ_y}\left[-\frac{1}{2}x + l\right]$$

$$w'(l) = \frac{Fl}{EJ_y}\left[-\frac{1}{2}l + l\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{Fl^2}{2EJ_y}}}$$

5



$$\underline{q(x) = \frac{q_0}{l}x}$$

$$EJ_y w^{IV}(x) = q(x) = \frac{q_0}{l}x$$

$$EJ_y w'''(x) = \frac{q_0}{l}\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EJ_y w''(x) = \frac{q_0}{l}\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

$$EJ_y w'(x) = \frac{q_0}{l}\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EJ_y w(x) = \frac{q_0}{l}\frac{x^5}{120} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Weitere Lösung: Wie vorher! R.B. $\longrightarrow C_1 \dots C_4 \longrightarrow w(x)$