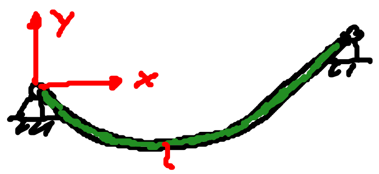
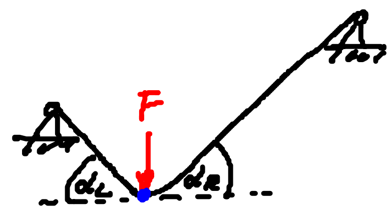
Thema: Seile und Ketten

I Seile und Ketten unter Einzelkräften



Form $y(x) = ?$
[unter Eigengewicht]

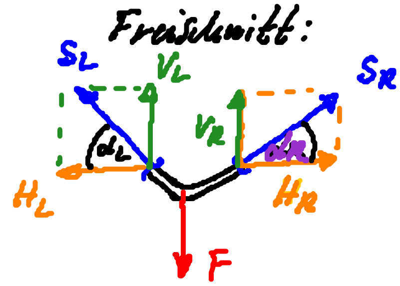


Masseloses Seil belastet durch Einzelkraft
$\Rightarrow$ Seilstücke links und rechts verlaufen linear!

Annahmen für ein ideales Seil:

- Es ist "biegeschlaff", d.h. es überträgt weder Querkräfte noch Moment. Es ist überträgt nur Zugkräfte
- Seil sei undehnbar

Freischnitt:



H: Horizontalkomponente der Seilkraft

V: Vertikalkomponente

GGB: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{H_L = H_R}}$ $\Rightarrow$ Aha! Bei Vertikalbelastung ändert sich H nicht!

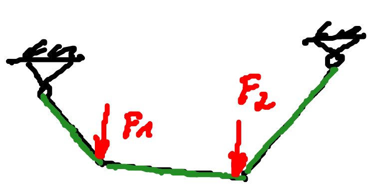
$\Sigma F_v = 0 \Rightarrow V_L + V_R - F = 0$

$$\boxed{V_R = F - V_L}$$

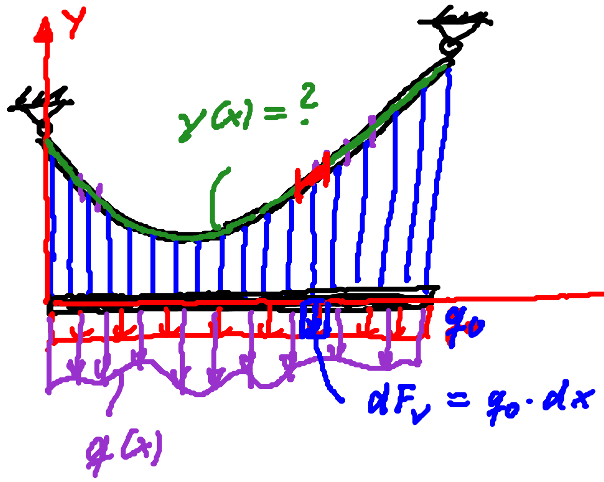
Die Vertikalkomponente "springt"!

$$\underline{\tan\alpha_R} = \frac{V_R}{H_R} = \frac{F - V_L}{H_L} = \underbrace{\frac{V_L}{H_L}}_{\tan\alpha_L} \cdot \left(\frac{F}{V_L} - 1\right)$$

Mehrere Einzelkräfte: $\Rightarrow$ Zerlegung in mehrere lineare Abschnitte

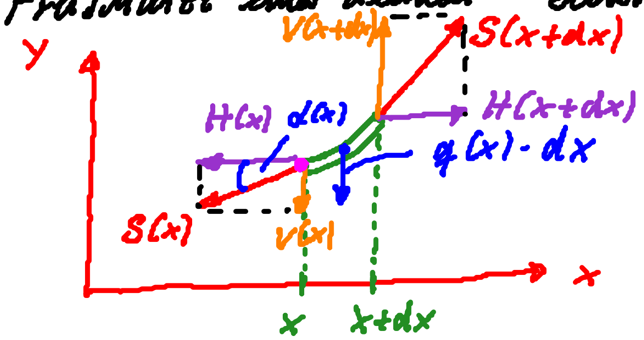


II Gleichung der Seillinie bei Wirkung einer Streckenlast



← Kommt bei Hängebrücken zur Anwendung!

Freischnitt eines „kleinen" Seilstückchens



GGB: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$

$$-H(x) + H(x+dx) = 0$$

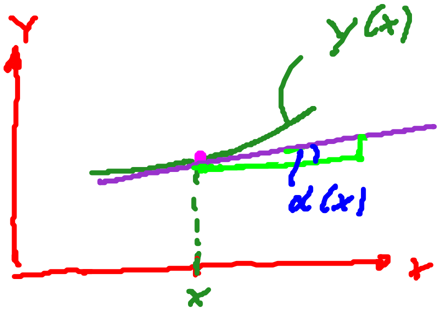
$$H(x+dx) = \boxed{H(x) \doteq H_0} = \text{const.} \quad (1)$$

Die Horizontalkomponente im Seil bleibt unverändert!

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V(x+dx) - V(x) - q(x) \cdot dx = 0$$

$$\frac{V(x+dx) - V(x)}{dx} = q(x).$$

$$\boxed{V'(x) = q(x)} \quad (2)$$



Tangente im Punkt $(x|y)$

Steigung der Tangente: $\tan \alpha(x) = y'(x)$ (3)

Andererseits gilt: $\tan \alpha(x) = \dfrac{V(x)}{H(x)}$ (4)

$$(3) \doteq (4) \Rightarrow y'(x) = \frac{V(x)}{H(x)} \overset{(1)}{=} \frac{V(x)}{H_0} \quad // \; (\,)' \,\hat{=}\, \frac{d(\,)}{dx}$$

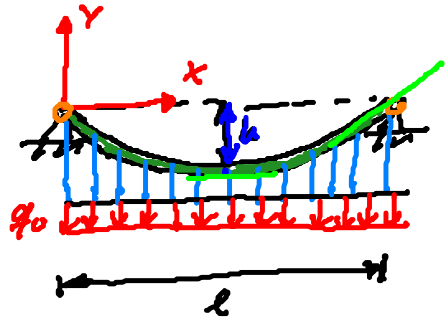
$$y''(x) = \frac{1}{H_0} V'(x) \quad (5)$$

$$(2) \text{ in } (5) \Rightarrow \boxed{y''(x) = \frac{q(x)}{H_0}}$$

Dgl. für die Seillinie! $[y(x)]$

Problem: H_0 muss noch bestimmt werden!

Beispiel: „Hängebrücke"



Gegeben: h, ℓ, q_0

Gesucht: $y(x)$, maximale Seilkraft!

Lösung:

Dgl der Seillinie: $y''(x) = \frac{q(x)}{H_0}$

Hier: $q(x) = q_0$

$$\Rightarrow \quad y''(x) = \frac{q_0}{H_0} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \frac{q_0}{H_0} \cdot x + C_1$$

$$(*) \quad y(x) = \frac{q_0}{H_0} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Aha! Parabel!

Bestimmung der Integrationskonstanten aus Randbedingungen:

$$y(x=0)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_0 \cdot 0^2}{H_0 \cdot 2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$y(x=\ell)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_0}{2H_0}\ell^2 + C_1 \cdot \ell = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{q_0 \cdot \ell}{2H_0}$$

Einsetzen in $(*)$: $y(x) = \frac{q_0}{2H_0} \cdot x^2 - \frac{q_0 \cdot \ell}{2H_0} \cdot x$

$$= \frac{q_0 \ell^2}{2H_0}\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{x}{\ell}\right)\right] = \frac{q_0 \ell^2}{2H_0}\Big[\underbrace{\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{x}{\ell}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}_{\left(\frac{x}{\ell}-\frac{1}{2}\right)^2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\Big]$$

$$= \frac{q_0 \cdot \ell^2}{2H_0}\left[\left(\frac{x}{\ell} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$

$H_0 = ?$ Aus Zusatzbedingung: $y\left(\frac{\ell}{2}\right) = -h \Rightarrow \frac{q_0 \cdot \ell^2}{2H_0}\left[0^2 - \frac{1}{4}\right] = -h$

$$h = \frac{1}{4} \frac{q_0 \cdot \ell^2}{2H_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x) = 4 \cdot h \left[\left(\frac{x}{\ell} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]}$$

Form des Seiles!

Maximale Seilkraft?

Allg.: $S(x) = \sqrt{H(x)^2+V(x)^2} = \sqrt{H_0^2+V(x)^2} = H_0\sqrt{1+\left(\frac{V(x)}{H_0}\right)^2}$

Es war: $\tan\alpha(x) = y'(x) = \frac{V(x)}{H(x)}$ $\quad = H_0\cdot\sqrt{1+y'(x)^2}$

$\Rightarrow$ Dort wo Steigung betragsmäßig maximal ist, ist "S" maximal!

(Behauptung)

Maximale Steigungen an den Rändern!

Ableitung: $y'(x) = 4\cdot h\left[2\left(\frac{x}{\ell}-\frac{1}{2}\right)^1\cdot\frac{1}{\ell}\right] = \frac{8h}{\ell}\cdot\left(\frac{x}{\ell}-\frac{1}{2}\right)$

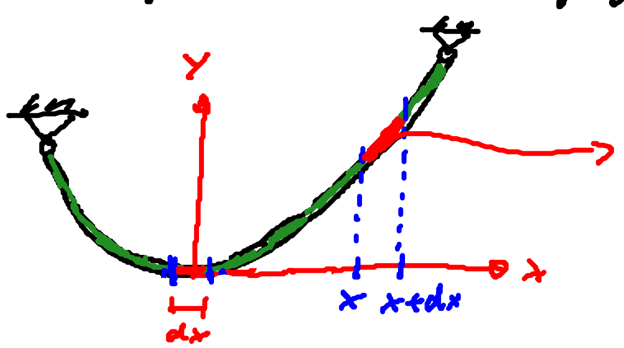
$y'(0) = -\frac{4h}{\ell}$

$y'(\ell) = \frac{4h}{\ell}$

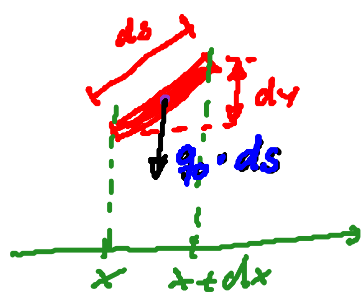
$$\Rightarrow \boxed{S_{max} = H_0\cdot\sqrt{1+\left(\frac{4h}{\ell}\right)^2}} = \frac{q_0\cdot\ell^2}{8h}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{4h}{\ell}\right)^2}$$

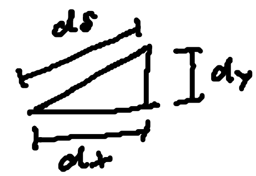
III Seil unter Eigengewicht – die "Kettenlinie"

Einzige Last auf dem Seil sei das Eigengewicht!



Annahme: Homogen, konstanter Querschnitt!





$(ds)^2 = (dx)^2+(dy)^2$

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\cdot\sqrt{1+y'(x)^2}$$

$$dF_y = q_0\cdot ds = \underbrace{q_0\cdot\sqrt{1+y'(x)^2}}_{q(x)}\cdot dx$$

Wir setzen einfach $q(x) = q_0\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}$ in die Dgl der Seillinie ein!

$$(*)\quad \boxed{y''(x) = \frac{q(x)}{H_0} = \frac{q_0}{H_0}\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}}$$

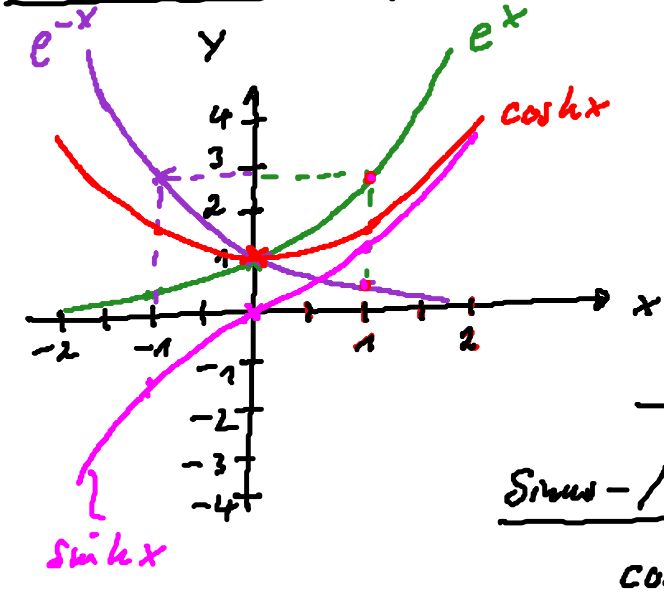
Nichtlineare Dgl zur Bestimmung von $y(x)$!

IV Ein wenig Mathematik (... Lsg. von (*) im Hinterkopf)

Hyperbolische Funktionen: $\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

Graphische Darstellung:



Eigenschaften:

$$[\cosh(x)]' = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \sinh(x)$$

$$[\sinh(x)]' = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \cosh(x)$$

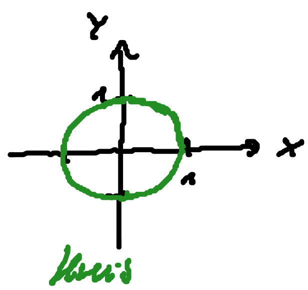
$$[\cosh(x)]^2 - [\sinh(x)]^2 = 1$$

Sinus-/Kosinusfunktionen heißen Kreisfunktionen

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

$$x = \cos\varphi \; ; \; y = \sin\varphi$$

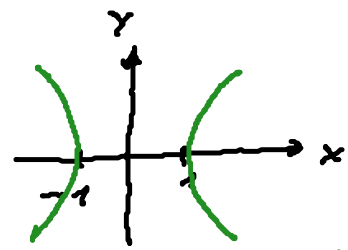
$$x^2 + y^2 = 1$$



$$\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$$

$$x = \cosh\varphi \; ; \; y = \sinh\varphi$$

$$x^2 - y^2 = 1$$



Hyperbelfunktion!

Warum der Name „Kosinus"-Hyperbolicus?

Komplexe Zahlen: Euler-Darstellung

$$\mathrm{I} \quad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\mathrm{II} \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

$$\frac{\mathrm{I}+\mathrm{II}}{2}: \quad \cos\varphi := \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

$$\frac{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{2i}: \quad \sin\varphi := \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$\boxed{\cosh(i\varphi)} = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) = \boxed{\cos\varphi}$$

analog $\boxed{\sinh(i\varphi)} = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) = \boxed{i\sin\varphi}$