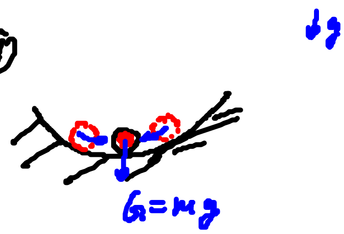
Vorlesung 25: Themen: Stabilität, Knickung

I. Begriff: Stabilität

Die Art des Gleichgewichtes hängt ab vom Verhalten des Systems nach Aufbringen einer kleinen Störung.

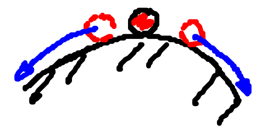
Man unterscheidet (am Beispiel)

①



Stabiles Gleichgewicht:
"Kugel" geht nach Störung in die Gleichgewichtslage zurück

②

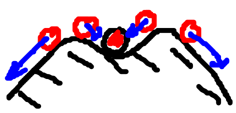


Instabiles Gleichgewicht (labiles)
Kugel geht nicht mehr zurück in die Ausgangsgleichgewichtslage

③

Indifferentes Gleichgewicht (grenzstabil)
Kugel kommt in einer benachbarten Lage (Gleichgewichtslage) zum Erliegen/Stehen.

④

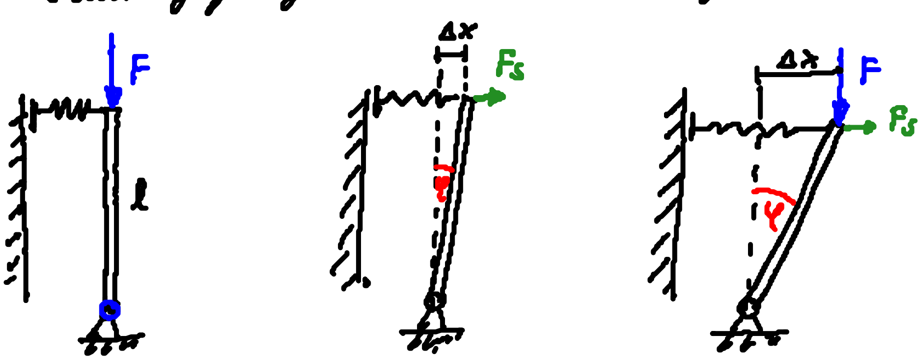


gegenüber kleinen Störungen stabil; bei großen Störungen instabil

---

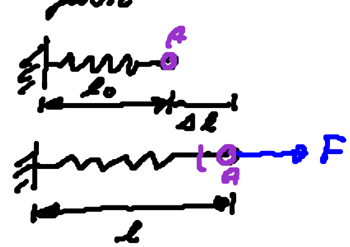
II Statische Stabilität von Feder-Stab-Systemen

Gelenkig gelagerter Stab, durch Feder gehalten:



Annahme: Die Stäbe seien starr!

- Es gilt das lineare Federgesetz



Längenänderung: $\Delta l := l - l_0$

ⓐ ⓑ ⓒ

ⓐ Unter Kraftwirkung verschiebt sich der Kraftangriffspunkt nicht

ⓑ Unter Wirkung einer kleinen horizontalen Kraft – Störkraft – F_S verschiebt sich der Stab geringfügig.

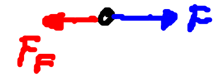
ⓒ Bei gleichzeitiger Wirkung von F und F_S kann sich die Lage des Systems "radikal" ändern. Die Kraft F_S führt zu einer kleinen Verdrehung, die durch das hinzukommende Moment ausgeübt durch F sehr groß werden kann.

Will man solche Systeme untersuchen, benötigt man Theorie 2. Ordnung:

- Gleichgewicht am verformten System
- Wir berücksichtigen kleine Verformungen, Glieder 2. Ordnung und höherer Ordnung werden vernachlässigt

(– Belastungen behalten ihre ursprüngliche Lage/Richtung bei)

Der Punkt A ist im Gleichgewicht:



GGB: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{F_F = F}}$ (1)

Materialgesetz für die Feder:

$F_F \sim \Delta l \Rightarrow \boxed{F_F = c \cdot \Delta l}$ (2)

Lineares Federgesetz!

c: Federsteifigkeit

$$[c] = \frac{[F_F]}{[\Delta l]} = \underline{\underline{\frac{N}{m}}}$$

(2) in (1) $\Rightarrow \underline{\underline{F = c \cdot \Delta l}}$

Analogie zu Stabdehnung:

$$N(x) = EA\,u'(x) = EA\,\frac{\Delta l}{l} = \frac{EA}{l}\,\Delta l = \underline{\underline{c\,\Delta l}}$$

Bsp. zur Taylorreihenentwicklung: $\boxed{f(x+\underbrace{dx}_{\Delta x}) = f(x) + f'(x)\cdot dx} + f''(x)\,\frac{dx^2}{2} + \dots$

$$\approx \boxed{f(x) + f'(x)\cdot \underbrace{dx}_{\Delta x}}$$

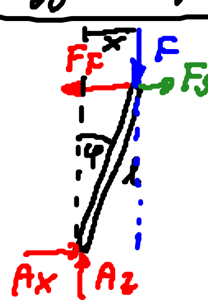
$$\boxed{\sin\varphi} = \sin(0) + \cos\varphi\big|_{\varphi=0}\cdot\varphi - \sin\varphi\big|_{\varphi=0}\,\frac{\varphi^2}{2} - \cos\varphi\big|_{\varphi=0}\,\frac{\varphi^3}{3!} + \dots$$

$$= \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} \dots \approx \boxed{\varphi}$$

$$\boxed{\cos\varphi} = \cos(0) - \sin\varphi\big|_{\varphi=0}\cdot\varphi - \cos\varphi\big|_{\varphi=0}\,\frac{\varphi^2}{2!} + \sin\varphi\big|_{\varphi=0}\,\frac{\varphi^3}{3!} + \cos\varphi\big|_{\varphi=0}\,\frac{\varphi^4}{4!} - \dots$$

$$= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \approx \boxed{1}$$

Zum Aufgabenbeispiel: • Freischnitt des verformten/ausgelenkten Systems



$l\cos\varphi \approx l$; $l\cdot\sin\varphi \approx l\varphi \approx x$

• Momentengleichgewicht um A

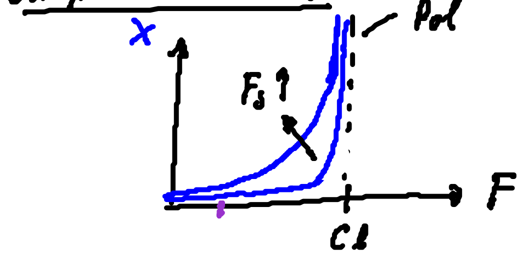
$$\Sigma M^{(A)} = 0 \Rightarrow -F_F\cdot \cancel{l}\cos\varphi + F_S\,\cancel{l}\cos\varphi + F\cdot\cancel{l}\cdot\sin\varphi = 0$$

Linearisierung: $\underline{-F_F} + \underline{F_S} + F\varphi = 0 \Rightarrow$

Federgesetz: $F_F = c\cdot\Delta x = \underline{c\cdot x}$

$$\Rightarrow -c\,x + F_S + F\,\frac{x}{l} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{F_S\cdot l}{cl - F}}$$

Graphischer Verlauf:



F_S sei sehr klein

Bei sehr kleiner Störung ist x solange sehr klein wie F noch genügend weit von dem kritischen Wert $F_K = cl$ entfernt ist. Kommt F hingegen in den Bereich von F_K, so kommt es zu einer großen Auslenkung! Im Grenzfall:

$$\lim_{F \to cl^-} x(F) = \infty$$

Instabilitätsbedingung aus anderer Sicht:

Wir ignorieren die kleine Störkraft, werten dennoch das Gleichgewicht am verformten System aus. Das führt auf:

$$-F_F + F\varphi = 0$$

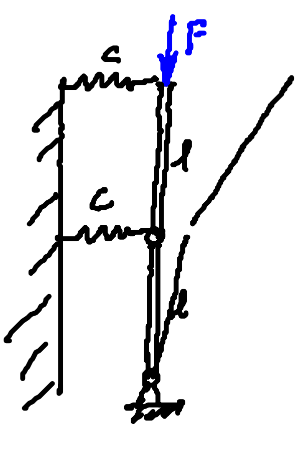
$$-cx + \frac{F}{l}x = 0 \Rightarrow \boxed{(F - cl)\cdot x = 0}$$

$x = 0$ triviale Lsg (nicht ausgelenktes System)

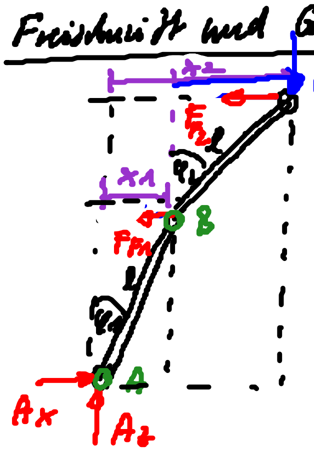
Wenn $F = cl$ ist, dann ist die Gleichung auch erfüllt und zwar unabhängig davon wie groß x ist. $F = c \cdot l$ ist die kritische Last! Bei dieser Last existieren unendlich viele Lösungen für x!

Es liegt ein indifferentes Gleichgewicht vor!

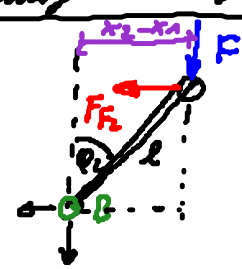
Bsp: $\boxed{B1}$ Gesucht: Die kritische Kraft (bzw. kritische Kräfte)



• Freischnitt und GGB am ausgelenkten System



Gesamtsystem:



Teilsystem:

$$\Sigma M^{(B)} = 0 \Rightarrow -F\cdot \overbrace{l\cdot\sin\varphi_2}^{x_2 - x_1} + F_{F_2}\cdot l\cdot\cos\varphi_2 = 0$$

$= x_2$

$$\Sigma M^{(A)} = 0 \Rightarrow -F\cdot(l\cdot\sin\varphi_2 + l\cdot\sin\varphi_1)$$
$$+ F_{F_2}(l\cos\varphi_2 + l\cos\varphi_1) + F_{F_1}\cdot l\cos\varphi_1 = 0$$

$x_2 = l\cdot\sin\varphi_2 + l\cdot\sin\varphi_1$

$x_1 = l\cdot\sin\varphi_1$

$$-F\cdot(x_2 - x_1) + cx_2\, l\cdot 1 = 0$$

$$-F\cdot x_2 + cx_2\, 2l + cx_1\cdot l\cdot 1 = 0$$

Umordnung: $\begin{matrix} \text{I} & F x_1 + (cl - F) x_2 = 0 \\ \text{II} & cl\, x_1 + (2cl - F) x_2 = 0 \end{matrix} \Bigg\} \;\hat{=}\; \begin{bmatrix} F & cl-F \\ cl & 2cl-F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Matrixform!

Das System hat nur eine nichttriviale Lösung, wenn die Matrix singulär wird [Zeilen sind linear abhängig voneinander]. Dann muss die Determinante der Koeffizientenmatrix gleich Null sein und es gibt unendlich viele Lösungen (indifferentes Gleichgewicht)

$$\det \begin{pmatrix} F & cl-F \\ cl & 2cl-F \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; F\cdot(2cl-F) - cl\cdot(cl-F) = 0$$

$$-F^2 + F(2cl + cl) - c^2l^2 = 0$$

$$F^2 - F\,3cl + c^2l^2 = 0$$

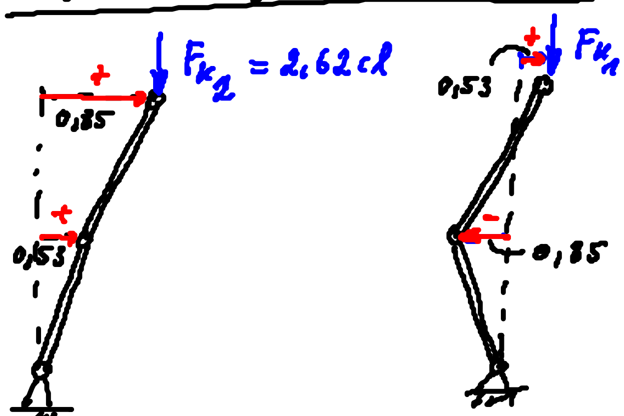
$$F_{1/2} = \tfrac{3}{2}cl \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}(cl)^2 - (cl)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,cl \approx 2{,}62\,cl \\ F_2 &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,cl \approx 0{,}38\,cl \end{aligned}\right\}$$

Eigenwerte!

Achtung! F_1 und F_2 sind kritische Lasten! Die 1. kritische Last liegt bei $\boxed{F_k = 0{,}38cl}$.
Diese ist ausschlaggebend für die Stabilität des Systems!

Es gibt 2 zugehörige Eigenformen



2. Eigenform

1. Eigenform

Die Eigenformen sind durch die Eigenvektoren gegeben!

Wie berechnen wir die "Knickeigenformen"?

Einsetzen der Eigenwerte F_1, F_2 in das Gleichungssystem (eine Gleichung reicht, da die Gleichungen linear abhängig sind).

Aus II folgt: $x_1 = \frac{-2cl + F}{cl}\, x_2$

① Einsetzen von $F_{K1} = 0{,}38cl$:

$$x_1 = \frac{-2cl + 0{,}38cl}{cl}\, x_2 = -1{,}62\, x_2$$

$$\Rightarrow \hat{x}_1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1{,}62 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{1. Eigenvektor}} x_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} -0{,}85 \\ 0{,}53 \end{pmatrix}}_{\text{Normierter 1. Eigenvektor!}} \cdot \tilde{c}$$

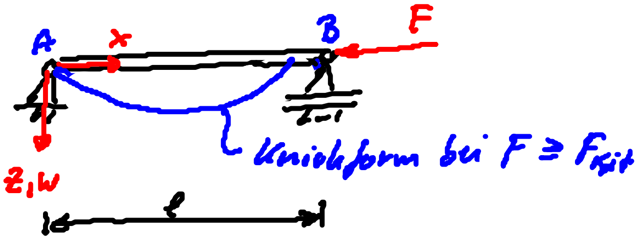
② Einsetzen von $F_{K2} = 2{,}62cl$:

$$x_1 = \frac{-2cl + 2{,}62cl}{cl}\, x_2 = 0{,}62\, x_2$$

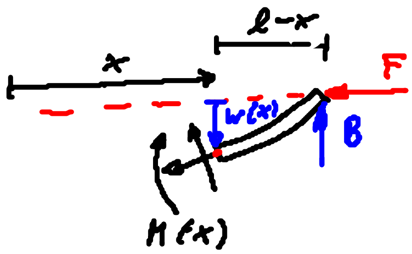
$$\Rightarrow \hat{x}_2 := \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}62 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{2. Eigenvektor}} x_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}53 \\ 0{,}85 \end{pmatrix}}_{\text{Normierter 2. Eigenvektor}} \cdot \tilde{c}$$

6H Knickung elastischer Stäbe

Beidseitig gelenkig gelagerter Balken, längs beansprucht



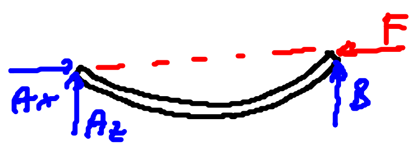
Theorie 2. Ordnung: Gleichgewicht am verformten System



$$\Sigma M^{(S)} = 0 \Rightarrow -M(x) + B \cdot (\ell - x) + F \cdot w(x) = 0 \quad (1)$$

Freischnitt des Gesamtsystems + $\Sigma M^{(A)} = 0$ ergibt:

$$\Sigma M^{(A)} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{B = 0}} \quad (2)$$



(2) in (1) $\Rightarrow$ $-M(x) + F w(x) = 0$ (3)

Material-Struktur-Gesetz: $M(x) = -EJ\, w''(x)$ (4)

(4) in (3) $\Rightarrow$ $EJ\, w''(x) + F w(x) = 0 \quad // : (EJ)$

(5) $\boxed{w''(x) + \lambda^2 w(x) = 0 \quad \text{mit } \lambda^2 = \frac{F}{EJ}}$

Knick-Dgl. 2. Ordnung!

Achtung: gilt nicht für beliebige Lagerungen. Dann ist die Knickdgl. 4. Ordnung zu nutzen!

$\overrightarrow{\text{VL am Do.}}$ [$w^{IV}(x) + \lambda^2 w''(x) = 0$ Knickdgl 4. Ordnung]
wobei $EJ = \text{const.}$

Allg. Lösung von (5): $\underline{w(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)}$ (6)

A und B versuchen wir aus den RB zu bestimmen!

I $w(0)=0 \Rightarrow A\cdot 1 + B\cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{A=0}$

II $w(\ell)=0 \Rightarrow \underbrace{A}_{=0}\cos(\lambda\ell) + \boxed{B\sin(\lambda\ell)=0} \Rightarrow \underline{B=0} \vee \boxed{\sin(\lambda\ell)=0}$

$B=0 \Rightarrow \underline{\underline{w(x)=0}}$ triviale Lsg.

$\sin(\lambda\ell)=0$ ist für beliebige B erfüllt! $\Rightarrow \infty$ viele Lsgn.

$$\sin(\lambda_k\cdot\ell)=0 \Rightarrow \lambda_k\cdot\ell = k\cdot\pi \Leftrightarrow \boxed{\lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}} \quad (7) \quad k\in\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$$

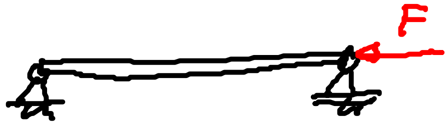
Eigenwerte

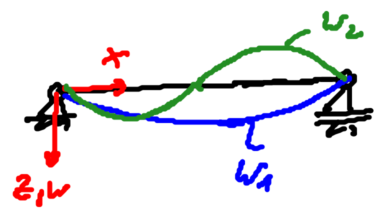
$$\lambda_k^2 = \frac{F_k}{EI} \Rightarrow \boxed{F_k = EI\lambda_k^2 = EI\left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2}$$

Kritische Lasten!

$$(7) \text{ in } (6) \Rightarrow \boxed{w_k(x) = B\cdot\sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)}$$

Knickeigenformen!



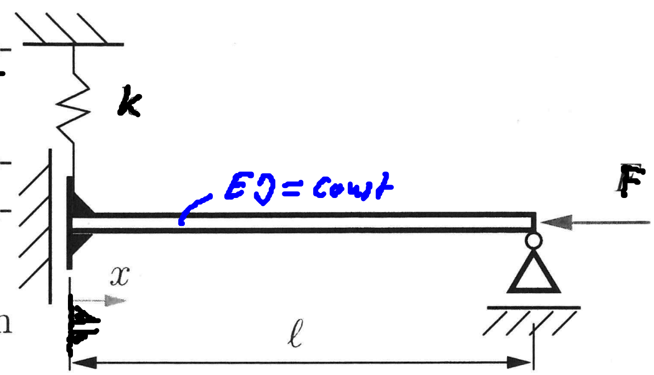


156. Der dargestellte Balken der Länge ℓ ist mit einer Normalkraft $F > 0$ belastet. Es soll das Knickproblem untersucht werden. In der gezeichneten Ausgangslage ist die Feder entspannt.

(a) Ermitteln sie alle erforderlichen Randbedingungen.

(b) Stellen sie das Gleichungssystem zur Berechnung der Konstanten auf und bestimmen sie die Eigenwertgleichung.

(c) Wie lautet die kritische Last F_{krit} für den Fall, dass die Feder unendlich weich ist?



Geg.: ℓ, EI, F, k

(a) Geometrische und physikalische Randbedingungen:

I $w(\ell)=0$

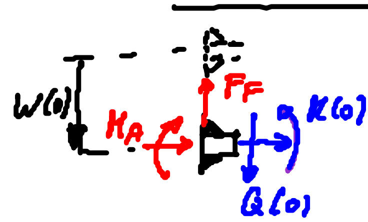
II $w'(0)=0$

III $M(\ell)=0 \Rightarrow w''(\ell)=0$

IV $EI\,w'''(0) + k\cdot w(0) = 0$

Freischnitt (für Skz):

$\underline{x=0}$



$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow$

$Q(0) - F_F = 0$

$Q(0) = F_F = k\,w(0)$

$\underline{-EI\,w'''(0) = k\cdot w(0)}$

(b) Es gilt die Knickdgl. 4. Ordnung: $w^{IV}(x) + \lambda^2 w''(x) = 0$
$$\lambda^2 = \frac{F}{EI}$$

Lsg. der Dgl: $w(x) = A\cos(\lambda x) + B\cdot\sin(\lambda x) + Cx + D$

$$w'(x) = -A\lambda\sin(\lambda x) + B\lambda\cos(\lambda x) + C$$
$$w''(x) = -A\lambda^2\cos(\lambda x) - B\lambda^2\sin(\lambda x)$$
$$w'''(x) = A\lambda^3\sin(\lambda x) - B\lambda^3\cos(\lambda x)$$

Auswertung der R.B.

$\mathrm{I} \Rightarrow A\cos(\lambda l) + B\sin(\lambda l) + Cl + D = 0$

$\mathrm{II} \Rightarrow B\lambda + C = 0 \Rightarrow \underline{C = -B\lambda}$ (R1)

$\mathrm{III} \Rightarrow -A\lambda^2\cos(\lambda l) - B\lambda^2\sin(\lambda l) = 0 \Leftrightarrow +A\cos(\lambda l) + B\sin(\lambda l) = 0$ (R2)

$\mathrm{IV} \Rightarrow -EI\,B\lambda^3 + k(A+D) = 0$

aus $\mathrm{I}, \mathrm{III} \Rightarrow Cl + D = 0 \Rightarrow \underline{\underline{D}} = -C\cdot l \overset{(R1)}{=} \underline{\underline{B\lambda\cdot l}}$ (R3)

aus (R2) $\Rightarrow \underline{A = -B\cdot\frac{\sin(\lambda l)}{\cos(\lambda l)}}$ (R4)

(R3),(R4) in $\mathrm{IV} \Rightarrow -EI\,B\lambda^3 + k\left(-B\frac{\sin\lambda l}{\cos\lambda l} + B\lambda l\right) = 0$

$B\left[-EI\lambda^3\cos(\lambda l) + k\cdot(-\sin\lambda l + \lambda l\cos\lambda l)\right] = 0$

$\Rightarrow \underline{B=0}$ (triviale Lsg) $\vee$ $\boxed{-EI\lambda^3\cos(\lambda l) + k(-\sin\lambda l + \lambda l\cos\lambda l) = 0}$

Eigenwertgl: $\Rightarrow \lambda \Rightarrow \underline{F = EI\lambda^2}$

(c) Kritische Kraft im Sonderfall $k = 0$:

$\Rightarrow -EI\lambda^3\cos(\lambda l) = 0 \Rightarrow \cos(\lambda l) = 0 \Rightarrow \lambda_k l = \frac{2k-1}{2}\pi$

$k \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots$

$$\boxed{\lambda_k = \frac{2k-1}{2}\frac{\pi}{l}}$$

Wir wissen: λ war 'ne Abkürzung: $\lambda_k^2 = \frac{F_k}{EI}$

$\Rightarrow \underline{F_k = EI\lambda_k^2 = EI\left(\frac{2k-1}{2}\frac{\pi}{l}\right)^2}$

Kritische Last ist $\underline{\underline{F_1 = EI\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2}}$