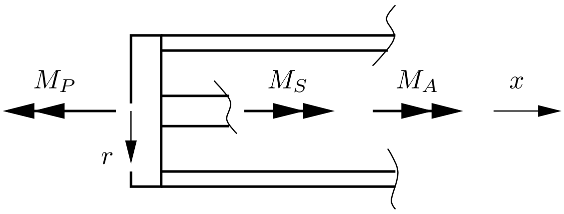
Tutorium

Aufgabe 97

Freischnitt und Gleichgewichtsbedingungen:



$$\sum M = 0 \quad \Rightarrow \quad M_P = M_S + M_A \tag{1}$$

M_P ... an der Platte angreifendes äußeres Moment
M_S ... Schnittmoment in der Stahlwelle
M_A ... Schnittmoment in der Alu-Hohlwelle

Geometrie: Durch die Verbindung mit der starren Platte müssen der Verdrehwinkel der Stahlwelle ϑ_S und der Verdrehwinkel der Aluwelle ϑ_A gleich sein (ϑ_p = Verdrehwinkel der Platte gegen die Einspannung):

$$\vartheta_A = \vartheta_S = \vartheta_p \tag{2}$$

Materialgesetz:

$$M = GI_t \frac{d\vartheta}{dx} \tag{3}$$

mit $I_t = I_p$ bei Kreisquerschnitten und $I_p = \int r^2 dA$, hier also für die Vollwelle:

$$I_{t,S} = \int_0^{\frac{d}{2}} r^2\, 2\pi r\, dr = \frac{\pi}{32} d^4 \tag{4}$$

und für die Hohlwelle

$$I_{t,A} = \int_{\frac{d_i}{2}}^{\frac{d_a}{2}} r^2\, 2\pi r dr = \frac{\pi}{32}\left(d_a^4 - d_i^4\right) \tag{5}$$

Integration von (3) über die gesammte Länge l (für den Fall, dass M, G und I_t über l konstant sind, also homogene Torsion vorliegt):

$$Ml = GI_t\vartheta \tag{6}$$

(2) und (6) eingesetzt in (1) ergibt:

$$M_p = \left(G_S I_{t,S} + G_A I_{t,A}\right)\frac{\vartheta_p}{l} \tag{7}$$

Schubwinkel/Drillung: $\gamma = r\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$,
Hookesches Gesetz: $\tau = G\,\gamma$

$$\tau(r) = G\,\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\,r \tag{8}$$

Offenbar tritt die größte Spannung jeweils am Außenrand der Welle auf. Mit $\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{\vartheta_p}{l}$ (homogene Torsion) ergibt sich:

$$\tau_{\max} = G\,\frac{\vartheta_p}{l}\,r_{\text{außen}} \;\Leftrightarrow\; \frac{\vartheta_p}{l} = \frac{\tau_{\max}}{G\,r_{\text{außen}}} \tag{9}$$

Das Moment, bei dem am Außenrand der Stahlwelle die zulässige Schubspannung für Stahl τ_S herrscht, ergibt sich aus (9) mit (7):

$$M_{p,S} = \left(G_S\, I_{t,S} + G_A\, I_{t,A}\right)\frac{\tau_S}{G_S\frac{d}{2}} \tag{10}$$

Das Moment, bei dem am Außenrand der Aluwelle die zulässige Schubspanung für Aluminium τ_A herrscht, lautet analog:

$$M_{p,A} = \left(G_S\, I_{t,S} + G_A\, I_{t,A}\right)\frac{\tau_A}{G_A\frac{d_a}{2}} \tag{11}$$

Mit den Zahlenwerten ergibt sich:

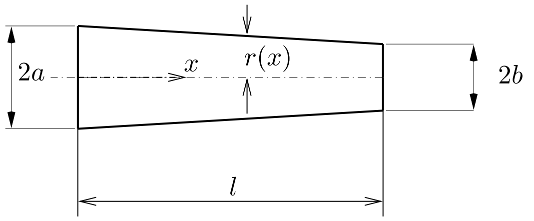
$$I_{t,S} = 6{,}14\cdot 10^{-7}\text{m}^4 \tag{12}$$
$$I_{t,A} = 2{,}00\cdot 10^{-6}\text{m}^4 \tag{13}$$
$$M_{p,S} = 6190\text{ N m} \tag{14}$$
$$M_{p,A} = 7039\text{ N m} \tag{15}$$

Bei einem Drehmoment größer als 6190 N m wird die zulässige Spannung in der Stahlwelle überschritten. Das maximal zulässige Drehmoment beträgt also:

$$\underline{M_{\text{zul}} = 6190\,\text{N m}} \tag{16}$$

Aufgabe 98

(a)



Geradengleichung für den Radius des Kegels:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{b-a}{l}x + a \\ &:= \alpha x + \beta \end{aligned}$$

Polares Trägheitsmoment für die Kreisfläche:

$$\begin{aligned} I_p(x) &= \frac{\pi}{2} r(x)^4 \\ &= \frac{\pi}{2}(\alpha x + \beta)^4 \end{aligned}$$

(b) Annahmen $M_t = const.$, $G = const.$, Torsions-Dgl. (gilt eigentlich nur für zylindrische Abschnitte, d.h. der Kegel muss stumpf sein! Siehe Szabo)

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \frac{M_T}{GI_p} \\ \varphi &= \int_0^l \frac{M_T}{G\frac{\pi}{2}(\alpha x + \beta)^4} dx \\ &= \frac{2M_T}{G\pi} \int_0^l \frac{1}{(\alpha x + \beta)^4} dx \\ &= \frac{2M_T}{G\pi} \int_0^l \frac{1}{z^4}\frac{1}{\alpha} dz \\ &= \frac{2M_T}{G\pi} \left[-\frac{1}{3}\frac{1}{z^3}\frac{1}{\alpha} \right]_a^b \\ &= \frac{2M_T l}{3G\pi(b-a)} (\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}) \end{aligned}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 94

(a) Schubverformung bei Kreisquerschnitten:

$$\gamma = r\frac{d\theta}{dx} \tag{17}$$

mit x-Achse als Wellenachse und $\theta(x)$ als Verdrehwinkel der Welle an der Stelle x. γ ist der Gleit- oder Schubwinkel.

Das Hookesche Gesetz verknüpft Torsionsspannungen τ und Gleitungen γ

$$\tau = G\gamma \tag{18}$$

Daraus folgt

$$\tau(r) = G\frac{d\theta}{dx}r \tag{19}$$

Das resultierende Moment der Schubspannungen in der tordierten Welle ist

$$M = \int_A r\tau dA \left(= \int_{r_i}^{r_a} r\tau(r)2\pi r dr\right) \tag{20}$$

Mit (19) folgt das Moment, das durch die Verwindung $\frac{d\theta}{dx}$ hervorgerufen wird:

$$M = G\left(\int_A r^2 dA\right)\frac{d\theta}{dx} = GI_p\frac{d\theta}{dx} \tag{21}$$

Der darin enthaltene Ausdruck

$$I_p = \int r^2 dA = 2\pi\int_{r_i}^{r_a} r^3 dr = \frac{\pi}{2}\left(r_a^4 - r_i^4\right) \tag{22}$$

wird als polares Flächenträgheitsmoment bezeichnet.

Die maximale Spannung in der Welle tritt am Außenrand bei $r = r_a$ auf, wie man aus Gl.(19) sofort sieht. Die maximal zulässige Verwindung $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{max}$ ist dann erreicht, wenn am Außenrand die maximal zulässige Spannung τ_{zul} erreicht wird. Aus (19) ergibt sich:

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{max} = \frac{\tau_{zul}}{G\,r_a} \tag{23}$$

Das Moment, das die Welle dabei überträgt, ergibt sich aus (21) mit (22):

$$M_{max} = \frac{\pi}{2}\frac{r_a^4 - r_i^4}{r_a}\tau_{zul}. \tag{24}$$

$$M_{max,1} = 45{,}20 \text{ kN m} \tag{25}$$

(b) Eine Vollwelle gleicher Masse hat die gleiche Querschnittsfläche πr_{a2}^2 wie die Welle aus Teil (a): $\pi\left(r_{a1}^2 - r_{i1}^2\right)$.

$$\Rightarrow r_{a2} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{i1}^2} = 55{,}9 \text{ mm} \tag{26}$$

$$\Rightarrow M_{max,2} = 23{,}32 \text{ kN m} \tag{27}$$

$\Rightarrow$ Die Hohlwelle gleicher Querschnittsfläche läßt ein fast doppelt so großes Torsionsmoment im Vergleich zur Vollwelle zu!

(c) Hier gilt analog zu Teil (b):

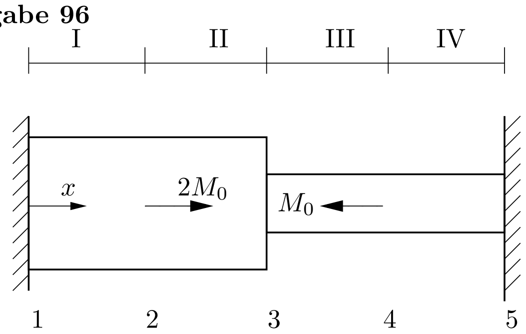
$$\pi\left(r_{a3}^2 - r_{i3}^2\right) = \pi\left(r_{a1}^2 - r_{i1}^2\right) \tag{28}$$

$$r_{i3} = \sqrt{r_{a3}^2 - r_{a1}^2 + r_{i1}^2} = 82{,}92\,\text{mm} \tag{29}$$

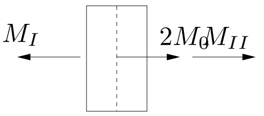
$$M_{max,3} = 70{,}41 \text{ kN m} \tag{30}$$

$\Rightarrow$ Eine Vergrößerung der Radien bei gleicher Querschnittsfläche führt zu einem noch höheren zulässigen Torsionsmoment. Grund dafür ist der Anstieg des polaren Flächenträgheitsmomentes.

Aufgabe 96

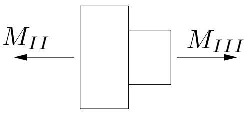


Freischneiden und Gleichgewicht an der Stelle 2:



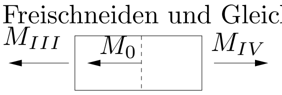
$$0 = 2M_0 + M_{II} - M_I \tag{31}$$

Freischneiden und Gleichgewicht an der Stelle 3:



$$0 = M_{III} - M_{II} \tag{32}$$

Freischneiden und Gleichgewicht an der Stelle 4:



$$0 = M_{IV} - M_{III} - M_0 \tag{33}$$

Daraus folgt:

$$M_{II} = M_I - 2M_0 \tag{34}$$
$$M_{III} = M_I - 2M_0 \tag{35}$$
$$M_{IV} = M_I - M_0 \tag{36}$$

Die Momente sind noch nicht genau bestimmt. M_I ist noch unbekannt. Deshalb werden nun die Verdrehwinkel der einzelnen Bereiche genauer betrachtet.

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M(x)}{GI_t(x)} \tag{37}$$

Integration der Gl. (37) in den vier Abschnitten: (bei Kreisquerschnitten: $I_t = I_p$)

von 1 nach 2 : $$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{M_I}{GI_{p1}}a \tag{38}$$

von 2 nach 3 : $$\varphi_3 - \varphi_2 = \frac{M_{II}}{GI_{p1}}a \tag{39}$$

von 3 nach 4 : $$\varphi_4 - \varphi_3 = \frac{M_{III}}{GI_{p2}}a \tag{40}$$

von 4 nach 5 : $$\varphi_5 - \varphi_4 = \frac{M_{IV}}{GI_{p2}}a \tag{41}$$

Randbedingungen:

$$\varphi_1 = 0\,, \qquad \varphi_5 = 0 \tag{42}$$

Auflösen:

(42) in (38): $$\varphi_2 = \frac{M_I}{GI_{p1}}a \tag{43}$$

mit (43) und (34) in (39): $$\varphi_3 = \frac{2a}{GI_{p1}}(M_I - M_0) \tag{44}$$

(42) mit (36) in (41): $$\varphi_4 = -\frac{M_I - M_0}{GI_{p2}}a \tag{45}$$

Aus (40) mit (44), (45) und (35) folgt:

$$-\frac{M_I - M_0}{GI_{p2}}a - \frac{2a}{GI_{p1}}(M_I - M_0) = \frac{M_I - 2M_0}{GI_{p2}}a \tag{46}$$

umgeformt:

$$\frac{-M_I + M_0}{I_{p2}} - \frac{2(M_I - M_0)}{I_{p1}} = \frac{M_I - 2M_0}{I_{p2}} \tag{47}$$

mit $\eta = \frac{I_{p1}}{I_{p2}}$ folgt:

$$(-M_I + M_0)\eta + 2M_0 - 2M_I = (M_I - 2M_0)\eta \tag{48}$$

Daraus folgt für die einzelnen Momente:

$$M_I = M_0\frac{3\eta + 2}{2(1+\eta)} \tag{49}$$
$$M_{II} = -\frac{2+\eta}{2(1+\eta)}M_0 \tag{50}$$
$$M_{III} = M_{II} \tag{51}$$
$$M_{IV} = M_0\frac{\eta}{2(1+\eta)} \tag{52}$$

Nun sind die Momente alle bestimmt und untereinander vergleichbar.
$\tau_{\max}$ kann nun für die 4 Bereiche ausgewertet werden.

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p}\frac{d}{2} \tag{53}$$

Mit

$$\xi = \frac{d_1}{d_2} \quad \Rightarrow \frac{I_{p1}}{I_{p2}} = \frac{d_1^4}{d_2^4} = \xi^4 = \eta \tag{54}$$

erhält man in den einzelnen Bereichen folgende Beträge der Spannungen $|\tau_{\max}|$:

Abschnitt I: $$|\tau_{\max,\mathrm{I}}| = \frac{M_0}{I_{p1}}\frac{d_1}{2}\frac{3\eta+2}{2(1+\eta)} \tag{55}$$

Abschnitt II: $$|\tau_{\max,\mathrm{II}}| = \frac{M_0}{I_{p1}}\frac{d_1}{2}\frac{\eta+2}{2(1+\eta)} \tag{56}$$

Abschnitt III: $$|\tau_{\max,\mathrm{III}}| = \frac{M_0}{I_{p1}}\frac{d_1}{2}\frac{\eta+2}{2(1+\eta)}\frac{\eta}{\xi} \tag{57}$$

Abschnitt VI: $$|\tau_{\max,\mathrm{IV}}| = \frac{M_0}{I_{p1}}\frac{d_1}{2}\frac{\eta}{2(1+\eta)}\frac{\eta}{\xi} \tag{58}$$

Gesucht ist die maximale Spannung $|\tau_{\max}|$ im Bereich I+II im Vergleich zu der maximalen Spannung im Bereich III+IV. Aus der obigen Aufstellung ist ersichtlich, dass $\tau_{\max,\mathrm{I}} > \tau_{\max,\mathrm{II}}$ und $\tau_{\max,\mathrm{III}} > \tau_{\max,\mathrm{IV}}$. Das heißt, da wir gleiche maximale Spannungen in I+II und III+IV haben wollen, muss $\tau_{\max,\mathrm{I}} = \tau_{\max,\mathrm{III}}$ sein!

$$\tau_{max,I} = \tau_{max,III} \tag{59}$$
$$\Rightarrow\ 3\eta + 2 = (\eta + 2)\frac{\eta}{\xi} \tag{60}$$
$$\Leftrightarrow\ \xi(3\eta + 2) = 2\eta + \eta^2 \tag{61}$$
$$\Leftrightarrow\ \xi(3\xi^4 + 2) = 2\xi^4 + \xi^8 \quad (\text{mit } \eta = \xi^4) \tag{62}$$
$$\Leftrightarrow\ \xi^7 - 3\xi^4 + 2\xi^3 - 2 = 0 \tag{63}$$

Die numerische Lösung lautet: $\xi = 1{,}29$.