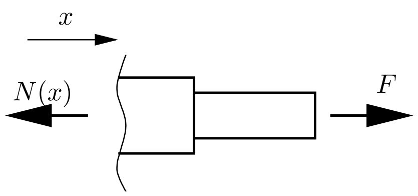
Tutorium

Aufgabe 78

Statisches Gleichgewicht: Schnitt an beliebiger Stelle x:



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = F \tag{1}$$

Die Normalkraft im Stab ist konstant gleich F. Das gilt für beide Bereiche!

Materialgesetz:

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad \sigma = \frac{N}{A} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = EA\frac{\Delta l}{l}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta l = l\frac{N}{EA} \tag{3}$$

Geometrie: Die Gesamtlängenänderung ist die Summe der Längenänderungen der beiden Stäbe 1 und 2:

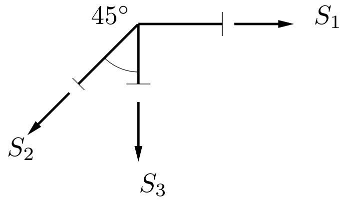
$$\Delta l_{\text{ges}} = \Delta l_1 + \Delta l_2 \tag{4}$$

$$= \frac{l_1}{E_1 A_1}F + \frac{l_2}{E_2 A_2}F \tag{5}$$

$$= 37{,}72\ \mu\text{m} \tag{6}$$

Aufgabe 88

Gleichgewicht:



$$\sum H = 0 \Rightarrow S_1 = S_2\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{7}$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow S_3 = -S_2\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{8}$$

Material-Struktur-Gleichung:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{S_1}{EA} + \alpha\Delta T \tag{9}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{S_2}{EA} \tag{10}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{S_3}{EA} \tag{11}$$

Mit den Gleichgewichtsbedingungen und den Material-Struktur-Gleichungen für die 3 Stäbe haben wir zusammen 5 Gleichungen für die 6 Unbekannten: $S_1, S_2, S_3, \Delta l_1, \Delta l_2$ und Δl_3. Die fehlende Gleichung ist eine kinematische Beziehung zwischen den Längenänderungen aller Stäbe.

Kinematik:

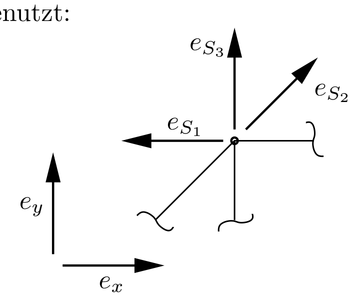
Die linearisierte Verlängerung des Stabs berechnet sich mit der Formel

$$\Delta l = \underline{u} \cdot \underline{e}_S \tag{12}$$

Der Verschiebungsvektor $\underline{u}$ hat die Komponenten u_x und u_y:

$$\underline{u} = u_x\underline{e}_x + u_y\underline{e}_y = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \tag{13}$$

In der vorliegenden Aufgabe wird die Formel (12) für alle drei Stäbe benutzt:



$$\underline{e}_{S_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta l_1 = \underline{u} \cdot \underline{e}_{S1} = -u_x \tag{14}$$

$$\underline{e}_{S_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta l_2 = \underline{u} \cdot \underline{e}_{S2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(u_x + u_y) \tag{15}$$

$$\underline{e}_{S_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta l_3 = \underline{u} \cdot \underline{e}_{S3} = u_y \tag{16}$$

Wir eliminieren mit den Gleichgewichtsbeziehungen (7) und (8) zunächst in den Material-Struktur-Gleichungen

(9)–(11) S_1 und S_3 (mit $l_1 = l_3 = b$ und $l_2 = \sqrt{2}b$):

$$\Delta l_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{S_2 b}{EA} + \alpha\Delta T b \quad (17)$$

$$\Delta l_2 = \sqrt{2}\frac{S_2 b}{EA} \quad (18)$$

$$\Delta l_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{S_2 b}{EA} \quad (19)$$

Nun wird auch noch S_2 eliminiert:

$$\Delta l_1 + \Delta l_3 = \alpha\Delta T b \quad (20)$$

$$\Delta l_2 + 2\Delta l_3 = 0 \quad (21)$$

Einsetzen der Beziehungen für die Verschiebung des Knotens P (14), (15) und (16):

$$-u_x + u_y = \alpha\Delta T b \quad (22)$$

$$u_x + (1 + 2\sqrt{2})u_y = 0 \quad (23)$$

Somit folgt für die Verschiebung des Punktes A

$$u_x = -\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+2}\alpha\,\Delta T\,b \quad (24)$$

$$u_y = \frac{\alpha\,\Delta T\,b}{2\sqrt{2}+2} \quad (25)$$

Das ist eine Verschiebung nach links oben.

Hausaufgaben

Aufgabe 76

(a)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = 2{,}5\ 10^{-3} \quad (26)$$

(b)

$$\sigma = E\varepsilon = 525\ \mathrm{N/mm^2} \quad (27)$$

(c)

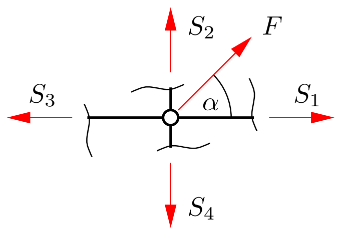
$$F = A\sigma \quad \Rightarrow \quad A = \frac{F}{\sigma} = 19{,}05\ \mathrm{mm^2} \quad (28)$$

$$A = \frac{\pi}{4}d^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = 4{,}92\ \mathrm{mm} \quad (29)$$

Aufgabe 87

Das System ist statisch unbestimmt, d.h. die Gleichgewichtsbedingungen allein reichen nicht aus, um die Stabkräfte zu berechnen.

Freischnitt des unverformten Systems:



Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 - S_3 + F\cos\alpha = 0 \quad (30)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 - S_4 + F\sin\alpha = 0 \quad (31)$$

Modifizierte Materialgesetze:

$$S_i = EA\frac{\Delta l_i}{l_i} \quad (32)$$

Die Querschnittsfläche aller Stäbe ist

$$A = D^2 \quad (33)$$

Die Längen der Stäbe in der unverformten Lage sind

$$l_1 = b; \qquad l_2 = d; \quad (34)$$

$$l_3 = a; \qquad l_4 = c; \quad (35)$$

Geometrisch linearisierte Verformungskinematik:

Die Längenänderungen der Stäbe werden durch Projektionen des Verschiebungsvektors $\underline{u}_P$ auf die Stabrichtungen der unverformten Lage gebildet. Die Stabeinheitsvektoren weisen dabei stets entlang der Stäbe zum Punkt hin, welcher sich verschiebt. Der Verschiebungsvektor $\underline{u}_P$ setzt sich bei Zugrundelegung einer kartesischen Basis, deren Basisvektoren in Richtung der positiven Koordinatenrichtungen zeigen, wie folgt zusammen:

$$\underline{u}_P = u_x\underline{e}_x + u_y\underline{e}_y \quad (36)$$

Die Längenänderungen der Stäbe sind

$$\Delta l_1 = \underline{e}_1 \cdot \underline{u}_P = -\underline{e}_x \cdot \underline{u}_P = -u_x \tag{37}$$
$$\Delta l_2 = \underline{e}_2 \cdot \underline{u}_P = -\underline{e}_y \cdot \underline{u}_P = -u_y \tag{38}$$
$$\Delta l_3 = \underline{e}_3 \cdot \underline{u}_P = \underline{e}_x \cdot \underline{u}_P = u_x \tag{39}$$
$$\Delta l_4 = \underline{e}_4 \cdot \underline{u}_P = \underline{e}_y \cdot \underline{u}_P = u_y \tag{40}$$
$$\Rightarrow \quad \Delta l_1 = -\Delta l_3 = -u_x \tag{41}$$
$$\Rightarrow \quad \Delta l_2 = -\Delta l_4 = -u_y \tag{42}$$

Einsetzen in (32) liefert

$$S_1 = -\frac{EA}{b}u_x; \qquad S_3 = \frac{EA}{a}u_x; \tag{43}$$
$$S_2 = -\frac{EA}{d}u_y; \qquad S_4 = \frac{EA}{c}u_y; \tag{44}$$

Einsetzen der Gleichungen (43) in (30)

$$-EA(\frac{1}{b} + \frac{1}{a})u_x + F\cos\alpha = 0 \Rightarrow u_x = \underline{\underline{\frac{F\cos\alpha}{EA(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}}} \tag{45}$$

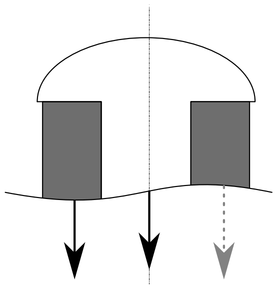
Einsetzen der Gleichungen (44) in (31)

$$-EA(\frac{1}{c} + \frac{1}{d})u_y + F\sin\alpha = 0 \Rightarrow u_y = \underline{\underline{\frac{F\sin\alpha}{EA(\frac{1}{c} + \frac{1}{d})}}} \tag{46}$$

Aufgabe 89

Der Niet will sich wegen der Temperaturabkühlung zusammenziehen, wird daran aber durch die Hülsen gehindert. Infolge dessen drückt er auf die Hülsen, im Niet selbst liegt eine Zugbeanspruchung vor.

Gleichgewicht:



Die Normalkraft in den Hülsen $F_{n,Hi}$ mit $i = 1, 2$ verteilt sich umlaufend auf die Hülse und geht damit nur einfach in das Kräftegleichgewicht ein:

$$-F_{n,H1} = -F_{n,H2} = F_{n,\text{Niet}} =: F \quad . \tag{47}$$

Kinematik:

$$\Delta\ell_{H1} + \Delta\ell_{H2} = \Delta\ell_N \tag{48}$$

Materialgesetz (homogene Dehnung):

$$\varepsilon_{H1} = \frac{\Delta\ell_{H1}}{\ell} = \frac{-F}{E_{H1}A_{H1}} \tag{49}$$
$$\varepsilon_{H2} = \frac{\Delta\ell_{H2}}{\ell} = \frac{-F}{E_{H2}A_{H2}} \tag{50}$$
$$\varepsilon_N = \frac{\Delta\ell_N}{2\ell} = \frac{F}{E_NA_N} + \alpha_t\Delta T \tag{51}$$

Gleichungen 49 bis 51 werden in 48 eingesetzt:

$$-\frac{F\ell}{E_{H1}A_{H1}} - \frac{F\ell}{E_{H2}A_{H2}} = \frac{F \cdot 2\ell}{E_NA_N} + 2\alpha_t\Delta T\ell \tag{52}$$

Man erhält für die Kraft

$$F\left(-\frac{\ell}{E_{H1}A_{H1}} - \frac{\ell}{E_{H2}A_{H2}} - \frac{2\ell}{E_NA_N}\right) = 2\alpha_t\Delta T\ell$$

$$\Rightarrow F = -\frac{2\alpha_t\Delta T}{\frac{1}{E_{H1}A_{H1}} + \frac{1}{E_{H2}A_{H2}} + \frac{2}{E_NA_N}}$$

$$= -\frac{2 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot (290 - 520)}{\frac{1}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 300\pi} + \frac{1}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 525\pi} + \frac{2}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 100\pi}}\,\text{N}$$

$$= 128.531\,\text{N} = 128,5\,\text{kN}$$

und für die Spannung

$$\sigma_N = \frac{F_N}{A_N} = \frac{128,5\,\text{kN}}{\frac{2^2}{4}\pi\,\text{cm}^2} = 40,9\,\text{kN/cm}^2. \tag{53}$$

Die Spannungen in den Hülsen sind

$$\sigma_{H1} = 13,6\text{kN/cm}^2 \tag{54}$$
$$\sigma_{H2} = 7,8\text{kN/cm}^2 \tag{55}$$