Tutorium

Aufgabe 61

Lösung mit der Schnittlasten-Differentialgleichung

Für das Biegemoment $M(x)$, die Querkraft $Q(x)$ und die äußere Belastung $q(x)$ gelten die Differentialgleichungen

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad , \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \quad .$$

Einsetzen der Streckenlast $q(x)$ führt auf

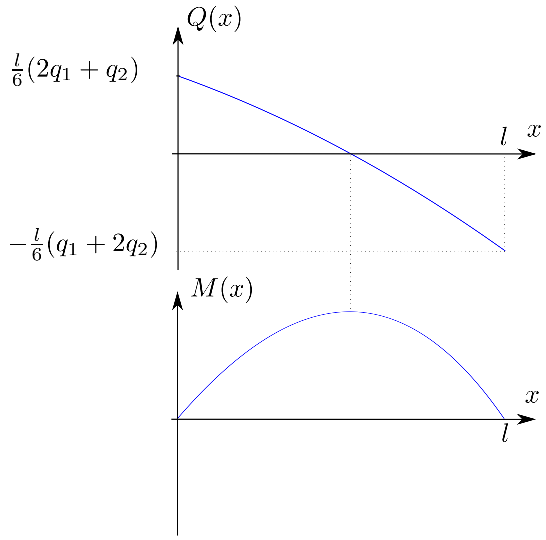
$$M(x) = \frac{q_1 - q_2}{6l}x^3 - \frac{q_1}{2}x^2 + C_1 x + C_2 \quad , \tag{1}$$

mit den Integrationskonstanten C_1 und C_2. In den Punkten A und B ist der Balken gelenkig gelagert. Demnach gilt

$$M(0) = 0 \quad , \quad M(l) = 0 \quad .$$

Einsetzen dieser Randbedingungen in (1) liefert das gesuchte Ergebnis

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{(q_1 - q_2)\,l^2}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{q_1 l^2}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 \\ &\quad + \frac{(2q_1 + q_2)\,l^2}{6}\left(\frac{x}{l}\right) \\ Q(x) &= \frac{(q_1 - q_2)\,l}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - q_1 l\left(\frac{x}{l}\right) + \frac{(2q_1 + q_2)\,l}{6} \quad . \end{aligned}$$



Aufgabe 68

(a) Die Schnittlastendifferentialgleichungen lauten

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = Q(x) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} = -q(x) \quad . \tag{2}$$

(b) Der Träger wird in zwei Bereiche geteilt: Bereich 1 mit $0 < x < 3l$ ($x_1 \in [0, 3l]$) und Bereich 2 mit $3l < x < 5l$ ($x_2 \in [0, 2l]$). Die Teilung bei $x = 3l$ ist nötig, da dort die Streckenlast einen Sprung hat. Für die Streckenlast gilt

$$\begin{aligned} q(x_1) &= \frac{q_0}{3l}x_1 \\ q(x_2) &= -q_0 \quad . \end{aligned}$$

(c) Die Rand- und Übergangsbedingungen lauten

$$M(x_2 = 2l) = 0 \tag{3}$$
$$Q(x_2 = 2l) = 0 \tag{4}$$
$$M(x_2 = 0) = M(x_1 = 3l) \tag{5}$$
$$Q(x_2 = 0) = Q(x_1 = 3l) \tag{6}$$

Die Querkraft weist bei $x = 3l$ einen Knick auf, da dort die Streckenlast von q_0 auf $-q_0$ springt.

(d) Durch Integration von (2) im Abschnitt BC (Bereich 2) erhält man

$$\begin{aligned} Q(x_2) &= q_0 x_2 + C_1 \\ M(x_2) &= \frac{1}{2}q_0 x_2^2 + C_1 x_2 + C_2 \quad . \end{aligned}$$

Einsetzen der Randbedingungen (3) und (4) führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= 2q_0 l + C_1 \\ 0 &= \frac{4}{2}q_0 l^2 + 2C_1 l + C_2 \end{aligned}$$

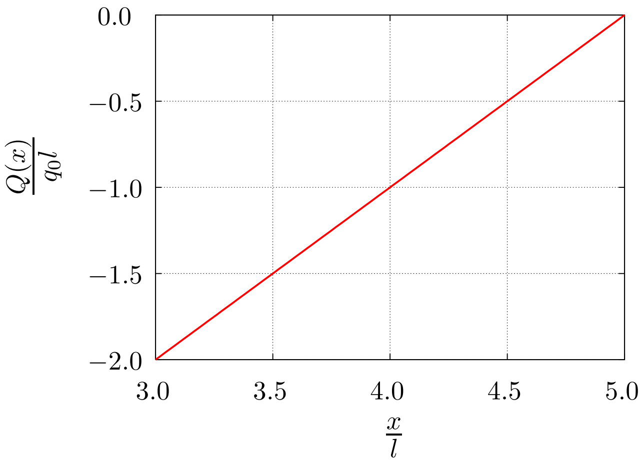
und schließlich auf die Konstanten

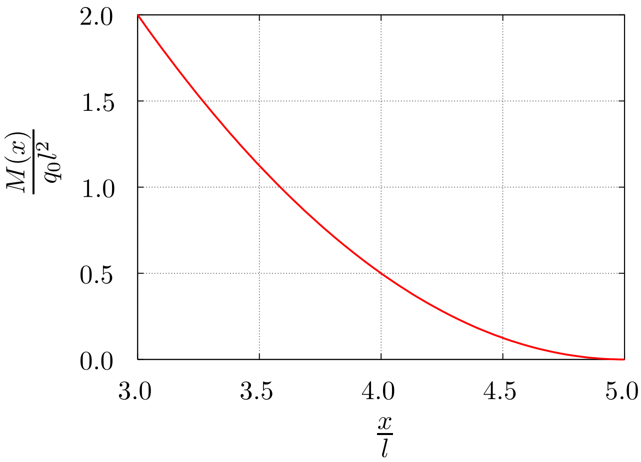
$$C_1 = -2q_0 l \quad , \quad C_2 = +2q_0 l^2 \quad .$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} Q(x_2) &= q_0 l\left(\frac{x_2}{l} - 2\right) \\ M(x_2) &= q_0 l^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\frac{x}{l} + 2\right) \quad . \end{aligned}$$

(e) Die Diagramme zeigen die entsprechenden Kurven.





Hausaufgaben

Aufgabe 65

(a)

(b) Rand- und Übergangsbedingungen:

$$N(x_1 = 0) \stackrel{!}{=} 0 \tag{7}$$
$$Q(x_1 = 0) \stackrel{!}{=} -F \tag{8}$$
$$M(x_1 = 0) \stackrel{!}{=} 0 \tag{9}$$
$$N(x_1 = l) = N(x_2 = 0) \tag{10}$$
$$Q(x_1 = l) = Q(x_2 = 0) \tag{11}$$
$$M(x_1 = l) = M(x_2 = 0) \tag{12}$$

Bereich I:

Normalkraft:

$$\begin{aligned} N'(x_1) &= n(x_1) = 0 \\ \Rightarrow\ N(x_1) &= C_1 \\ \Rightarrow\ N(x_1) &\stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow\ C_1 = 0 \\ &\Rightarrow \underline{N(x_1) = 0} \end{aligned}$$

Querkraft:

$$\begin{aligned} -Q'(x_1) &= q(x_1) \\ \Rightarrow\ -Q'(x_1) &= 0 \ \Rightarrow\ \underline{-Q(x_1) = C_2} \\ -Q(x_1) &= C_2 \stackrel{!}{=} F \ \Rightarrow\ \underline{Q(x_1) = -F = -q_0 l} \end{aligned}$$

Momentenverteilung:

$$\begin{aligned} M'(x_1) &= Q(x_1) \\ \Rightarrow\ M'(x_1) &= -F \\ \Rightarrow\ M(x_1) &= -Fx_1 + C_3 \\ M(x_1 = 0) = C_3 &\stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow\ \underline{M(x_1) = -Fx_1 = -q_0 l x_1} \end{aligned}$$

Bereich II:

Normalkraft:

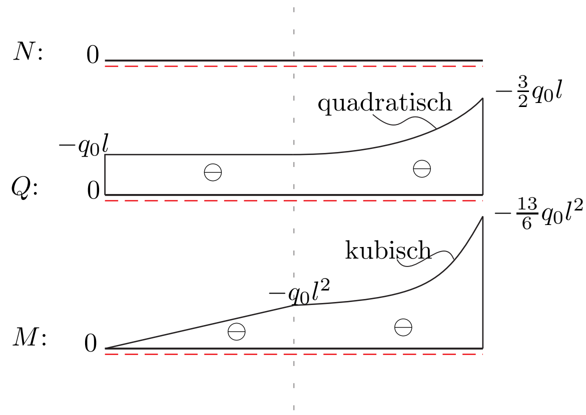
$$\begin{aligned} N'(x_2) &= q(x_2) = 0 \\ \Rightarrow\ N(x_2) &= C_4 \\ \Rightarrow\ N(x_2 = 0) &= N(x_1 = l) \ \Rightarrow\ C_4 = 0 \\ &\Rightarrow \underline{N(x_2) = 0} \end{aligned}$$

Querkraft:

$$\begin{aligned} -Q'(x_2) &= q(x_2) \\ \Rightarrow\ -Q'(x_2) &= \frac{q_0}{l} x_2 \\ \Rightarrow\ -Q(x_2) &= \frac{q_0}{2l} x_2^2 + C_5 \\ Q(x_2 = 0) = -C_5 &\stackrel{!}{=} Q(x_1 = l) \ \Rightarrow\ C_5 = q_0 l \\ &\Rightarrow \underline{Q(x_2) = -\frac{q_0}{2l} x_2^2 - q_0 l} \end{aligned}$$

Momentenverteilung:

$$\begin{aligned} M'(x_2) &= Q(x_2) = -\frac{q_0}{2l} x_2^2 - q_0 l \\ \Rightarrow\ M(x_2) &= -\frac{q_0}{6l} x_2^3 - q_0 l x_2 + C_6 \\ M(x_2 = 0) &\stackrel{!}{=} M(x_1 = l) \ \Rightarrow\ C_6 = -q_0 l^2 \\ &\Rightarrow \underline{M(x_2) = -\frac{q_0}{6l} x_2^3 - q_0 l x_2 - q_0 l^2} \end{aligned}$$



Aufgabe 69

(a) Zwei starre Scheiben ($n = 2$) sind je in A bzw. E fest gelagert ($b_{\text{Auflager}} = 2 \times 2$) und mit einem Gelenk C ($b_{\text{Gelenk}} = 2$) verbunden. Die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit:

$$3n = b = b_{\text{Auflager}} + b_{\text{Gelenk}} \tag{13}$$
$$6 = 4 + 2 = 6 \quad \checkmark \tag{14}$$

ist also erfüllt.

$$\tag{15}$$

Wie man mit etwas Rechnung zeigt, lassen sich die Lagerreaktionen eindeutig bestimmen. Das System ist damit statisch bestimmt.

(b) Die Bereichseinteilung ist laut Aufgabenstellung bereits in lokalen Koordinaten vorgenommen. Dabei gilt:

$$x_1 \in [0, l] \qquad x_2 \in \left[0, \frac{2l}{\sqrt{3}}\right] \tag{16}$$
$$x_3 \in [0, l] \qquad x_4 \in [0, l] \tag{17}$$

Im gesamten System wirken keine Streckenlasten in die Balkenlängsrichtung:

$$q_x(x_i) = 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, 4 \quad . \tag{18}$$

Quer zur Balkenrichtung wirkt lediglich im ersten Bereich eine konstante Streckenlast:

$$q_z(x_1) = q_0 \tag{19}$$
$$q_z(x_j) = 0 \quad \text{mit } j = 2, 3, 4 \quad . \tag{20}$$

Damit ergeben sich die folgenden Schnittlastdifferentialgleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}N_i(x)}{\mathrm{d}x_i} = 0 \quad \forall i \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 M(x_1)}{\mathrm{d}x_1^2} = \frac{\mathrm{d}Q(x_1)}{\mathrm{d}x_1} = -q_0 \tag{22}$$

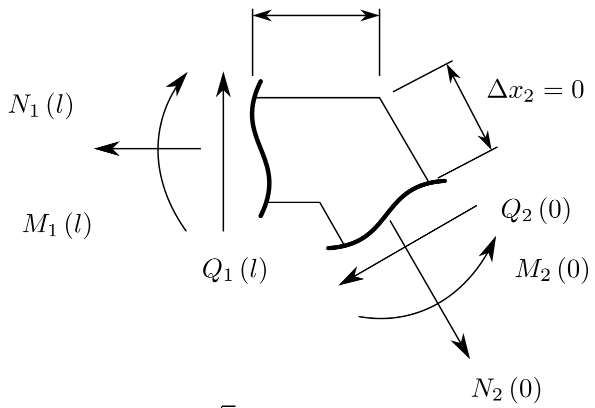
$$\frac{\mathrm{d}^2 M(x_j)}{\mathrm{d}x_j^2} = \frac{\mathrm{d}Q(x_j)}{\mathrm{d}x_j} = 0 \quad j = 2,3,4 \quad . \tag{23}$$

Die einfache Integration der Gleichung (18) ($\Rightarrow$ Normalkraft $N(x_i)$) liefert in jedem Berich eine Integrationskonstante. Um den Normalkraftverlauf in allen Bereichen zu bestimmen, müssen vier Rand- und/oder Übergangsbedingungen für die Normalkraft formuliert werden.
Die Schnittlasten-DGL für das Biegemoment muss für jeden Bereich zweifach integriert werden. Damit fallen in Summe 8 unbekannte Integrationskonstanten an. Es müssen daher acht Rand- und/oder Übergangsbedingungen für die Querkraft bzw. das Biegemoment formuliert werden.

(c) Die Rand- und Übergangsbedingungen lassen sich oft durch *scharfes Hinsehen* angeben. Im Zweifel kann stets ein Freischnitt der Bereichsgrenze(n)[1] zu Rate gezogen werden.
linker Rand vom ersten Bereich ($x_1 = 0$)
Das Lager A nimmt Kräfte in x- und z-Richtung auf. Für die Normal- und Querkraft lässt sich ohne weitere Rechnung keine Aussage treffen. Das Biegemoment muss allerdings verschwinden, da das Lager keine Momente aufnehmen kann:

$$\boxed{M_1(0) = 0} \quad . \tag{24}$$

rechter Rand vom ersten Bereich ($x_1 = l$)
Am Winkel B ist zur Übersicht dringend ein Freischnitt zu empfehlen.



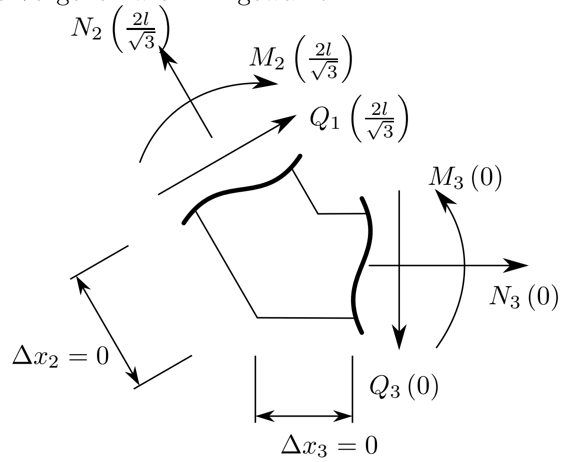
Mit $\sin(60°) = \sqrt{3}/2$ und $\cos(60°) = 1/2$ folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen (globales Basissystem gewählt):

$$\boxed{-N_1(l) + \frac{1}{2}N_2(0) - \frac{\sqrt{3}}{2}Q_2(0) = 0} \tag{25}$$

$$\boxed{-Q_1(l) + \frac{\sqrt{3}}{2}N_2(0) + \frac{1}{2}Q_2(0) = 0} \tag{26}$$

$$\boxed{-M_1(l) + M_2(0) = 0} \tag{27}$$

rechter Rand vom zweiten Bereich ($x_2 = \frac{2l}{\sqrt{3}}$)
Für die Übergangsbedingungen im Winkel C wird ein analoges Vorgehen wie in B gewählt.



Auch hier lassen sich wieder die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen. Es muss außerdem beachtet werden, dass dass Biegemoment in C nicht nur stetig (Ergebniss der GGW-Bed.), sondern aufgrund des Gelenks auch Null ist.

$$\boxed{-\frac{1}{2}N_2\left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}Q_2\left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right) - N_3(0) = 0} \tag{28}$$

$$\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}Q_2\left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}Q_2\left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right) + Q_3(0) = 0} \tag{29}$$

$$\boxed{M_2\left(\frac{2l}{\sqrt{3}}\right) = 0} \tag{30}$$

$$\boxed{M_3(0) = 0} \tag{31}$$

rechter Rand vom dritten Bereich ($x_3 = l$)
In D ist das Biegemoment stetig. Die Normalkraft am Rand des dritten Bereichs wird als Querkraft im vierten Bereich aufgenommen. Gleiches geschieht mit der Querkraft.

$$\boxed{-N_3(l) + Q_4(0) = 0} \tag{32}$$

$$\boxed{Q_3(l) + N_4(0) = 0} \tag{33}$$

$$\boxed{-M_3(l) + M_4(0) = 0} \tag{34}$$

oberer Rand vom vierten Bereich ($x_4 = l$)
Wie im Lager A verschwindet hier das Biegemoment.

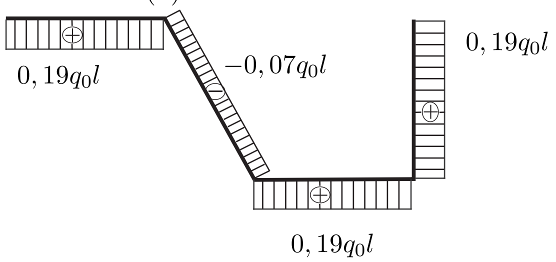
$$\boxed{M_4(l) = 0} \tag{35}$$

Damit sind 12 Rand- und Übergangsbedingungen für die 12 Integrationskonstanten gefunden. Über sukzessives Einsetzen der integrierten Lösungen in die Bedingungen folgt ein lineares Gleichungssystem, über das sich alle Konstanten bestimmen lassen.

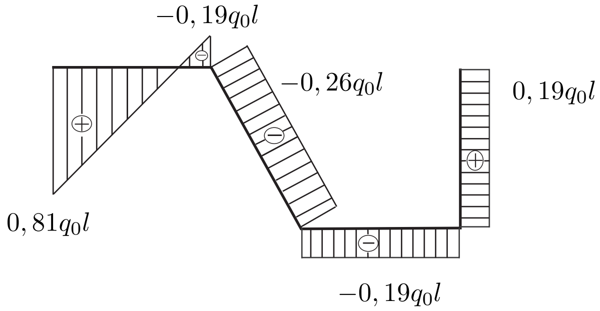
[1] Dabei ist ein Element der Dicke „Null“freizuschneiden und daran die Gleichgewichtsbedingung zu formulieren.

(d)

Normalkräfte $N(x)$



Querkräfte $Q(x)$



Biegemomente $M(x)$