Tutorium

Aufgabe 61

Lösung mit der Schnittlasten-Differentialgleichung

Für das Biegemoment $M(x)$, die Querkraft $Q(x)$ und die äußere Belastung $q(x)$ gelten die Differentialgleichungen

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad , \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \quad .$$

Einsetzen der Streckenlast $q(x)$ führt auf

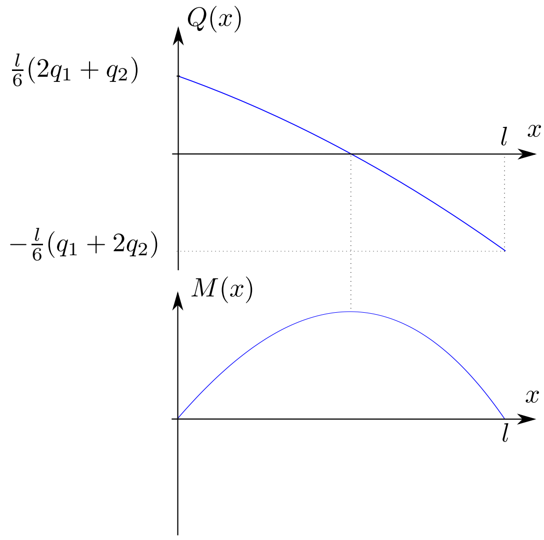
$$M(x) = \frac{q_1 - q_2}{6l}x^3 - \frac{q_1}{2}x^2 + C_1 x + C_2 \quad , \tag{1}$$

mit den Integrationskonstanten C_1 und C_2. In den Punkten A und B ist der Balken gelenkig gelagert. Demnach gilt

$$M(0) = 0 \quad , \quad M(l) = 0 \quad .$$

Einsetzen dieser Randbedingungen in (1) liefert das gesuchte Ergebnis

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{(q_1 - q_2)\,l^2}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{q_1 l^2}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 \\ &\quad + \frac{(2q_1 + q_2)\,l^2}{6}\left(\frac{x}{l}\right) \\ Q(x) &= \frac{(q_1 - q_2)\,l}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - q_1 l\left(\frac{x}{l}\right) + \frac{(2q_1 + q_2)\,l}{6} \quad . \end{aligned}$$



Aufgabe 68

(a) Die Schnittlastendifferentialgleichungen lauten

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = Q(x) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} = -q(x) \quad . \tag{2}$$

(b) Der Träger wird in zwei Bereiche geteilt: <u>Bereich 1</u> mit $0 < x < 3l$ ($x_1 \in [0, 3l]$) und <u>Bereich 2</u> mit $3l < x < 5l$ ($x_2 \in [0, 2l]$). Die Teilung bei $x = 3l$ ist nötig, da dort die Streckenlast einen Sprung hat. Für die Streckenlast gilt

$$\begin{aligned} q(x_1) &= \frac{q_0}{3l}x_1 \\ q(x_2) &= -q_0 \quad . \end{aligned}$$

(c) Die Rand- und Übergangsbedingungen lauten

$$M(x_2 = 2l) = 0 \tag{3}$$
$$Q(x_2 = 2l) = 0 \tag{4}$$
$$M(x_2 = 0) = M(x_1 = 3l) \tag{5}$$
$$Q(x_2 = 0) = Q(x_1 = 3l) \tag{6}$$

Die Querkraft weist bei $x = 3l$ einen Knick auf, da dort die Streckenlast von q_0 auf $-q_0$ springt.

(d) Durch Integration von (2) im Abschnitt BC (Bereich 2) erhält man

$$\begin{aligned} Q(x_2) &= q_0 x_2 + C_1 \\ M(x_2) &= \frac{1}{2}q_0 x_2^2 + C_1 x_2 + C_2 \quad . \end{aligned}$$

Einsetzen der Randbedingungen (3) und (4) führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= 2q_0 l + C_1 \\ 0 &= \frac{4}{2}q_0 l^2 + 2C_1 l + C_2 \end{aligned}$$

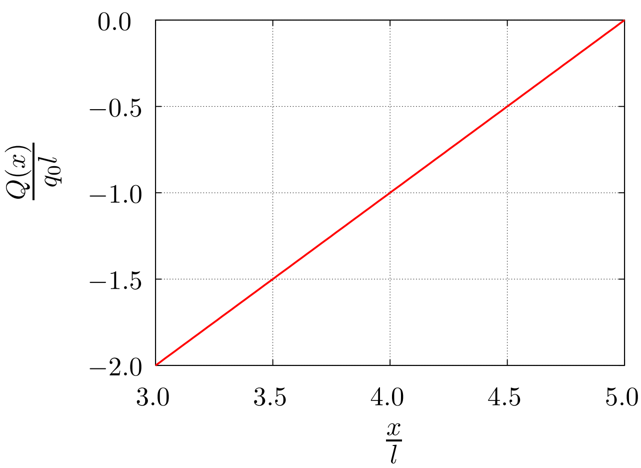
und schließlich auf die Konstanten

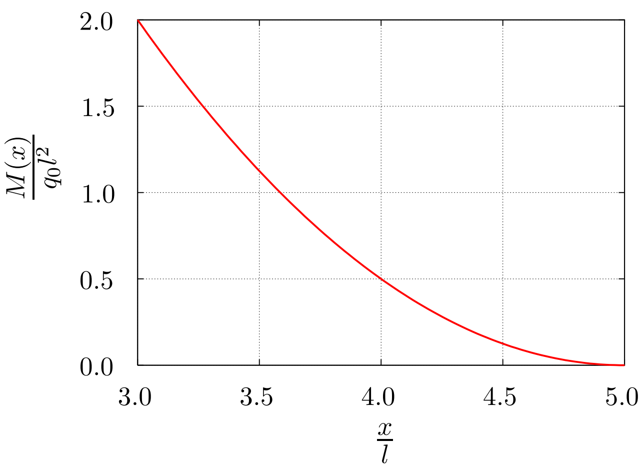
$$C_1 = -2q_0 l \quad , \quad C_2 = +2q_0 l^2 \quad .$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} Q(x_2) &= q_0 l\left(\frac{x_2}{l} - 2\right) \\ M(x_2) &= q_0 l^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\frac{x}{l} + 2\right) \quad . \end{aligned}$$

(e) Die Diagramme zeigen die entsprechenden Kurven.





Hausaufgaben

Aufgabe 65

(a)

(b) Rand- und Übergangsbedingungen:

$$N(x_1 = 0) \stackrel{!}{=} 0 \quad (7)$$
$$Q(x_1 = 0) \stackrel{!}{=} -F \quad (8)$$
$$M(x_1 = 0) \stackrel{!}{=} 0 \quad (9)$$
$$N(x_1 = l) = N(x_2 = 0) \quad (10)$$
$$Q(x_1 = l) = Q(x_2 = 0) \quad (11)$$
$$M(x_1 = l) = M(x_2 = 0) \quad (12)$$

Bereich I:
Normalkraft:

$$N'(x_1) = n(x_1) = 0$$
$$\Rightarrow N(x_1) = C_1$$
$$\Rightarrow N(x_1) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C_1 = 0$$
$$\Rightarrow \underline{N(x_1) = 0}$$

Querkraft:

$$-Q'(x_1) = q(x_1)$$
$$\Rightarrow -Q'(x_1) = 0 \Rightarrow \underline{-Q(x_1) = C_2}$$
$$-Q(x_1) = C_2 \stackrel{!}{=} F \Rightarrow \underline{Q(x_1) = -F = -q_0 l}$$

Momentenverteilung:

$$M'(x_1) = Q(x_1)$$
$$\Rightarrow M'(x_1) = -F$$
$$\Rightarrow M(x_1) = -F x_1 + C_3$$
$$M(x_1 = 0) = C_3 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{M(x_1) = -F x_1 = -q_0 l x_1}$$

Bereich II:
Normalkraft:

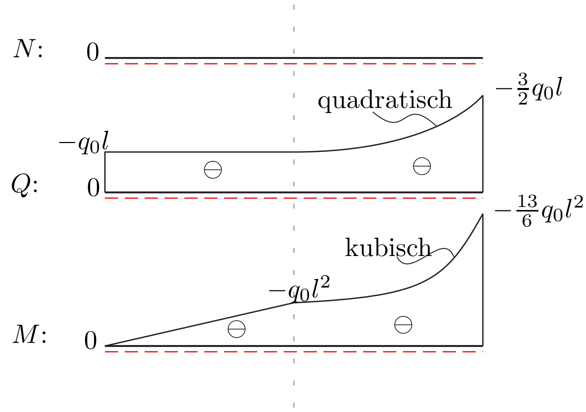
$$N'(x_2) = q(x_2) = 0$$
$$\Rightarrow N(x_2) = C_4$$
$$\Rightarrow N(x_2 = 0) = N(x_1 = l) \Rightarrow C_4 = 0$$
$$\Rightarrow \underline{N(x_2) = 0}$$

Querkraft:

$$-Q'(x_2) = q(x_2)$$
$$\Rightarrow -Q'(x_2) = \frac{q_0}{l} x_2$$
$$\Rightarrow -Q(x_2) = \frac{q_0}{2l} x_2^2 + C_5$$
$$Q(x_2 = 0) = -C_5 \stackrel{!}{=} Q(x_1 = l) \Rightarrow C_5 = q_0 l$$
$$\Rightarrow \underline{Q(x_2) = -\frac{q_0}{2l} x_2^2 - q_0 l}$$

Momentenverteilung:

$$M'(x_2) = Q(x_2) = -\frac{q_0}{2l} x_2^2 - q_0 l$$
$$\Rightarrow M(x_2) = -\frac{q_0}{6l} x_2^3 - q_0 l x_2 + C_6$$
$$M(x_2 = 0) \stackrel{!}{=} M(x_1 = l) \Rightarrow C_6 = -q_0 l^2$$
$$\Rightarrow \underline{M(x_2) = -\frac{q_0}{6l} x_2^3 - q_0 l x_2 - q_0 l^2}$$



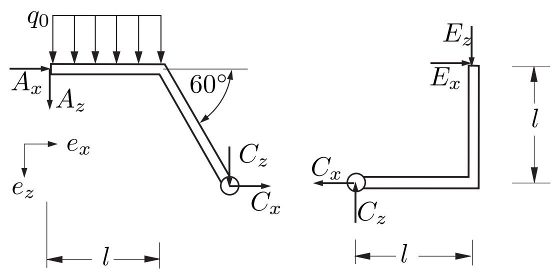
Aufgabe 69

(a)

$$f = 2 \cdot 3 = 6; \qquad r = 4; \qquad v = 2;$$
$$n = f - r - v = 0$$

Außerdem ist das System weder wackelig noch vorspannbar ⇒ System ist statisch bestimmt.

(b)



$$A_x + C_x = 0$$
$$A_z + C_z + q_0 l = 0$$
$$C_x l - C_z \left(l + \frac{1}{\sqrt{3}} l\right) - q_0 \frac{l^2}{2} = 0$$

$$E_x - C_x = 0$$
$$E_z - C_z = 0$$
$$-C_x l - C_z l = 0$$

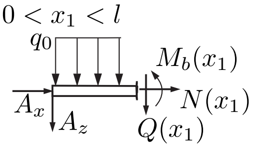
$$A_x = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l \qquad A_z = -\frac{3\sqrt{3}+2}{4\sqrt{3}+2}q_0 l$$

$$C_x = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l \qquad C_z = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l$$

$$E_x = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l \qquad E_z = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l$$

(c)

Balkenelement 1: $0 < x_1 < l$

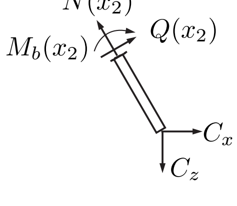


$$A_x + N(x_1) = 0$$
$$N(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l$$

$$Q(x_1) + A_z + q_0 x_1 = 0$$
$$Q(x_1) = \frac{3\sqrt{3}+2}{4\sqrt{3}+2}q_0 l - q_0 x_1$$

$$M_b(x_1) + A_z x_1 + \frac{1}{2}q_0 x_1^2 = 0$$
$$M_b(x_1) = \frac{3\sqrt{3}+2}{4\sqrt{3}+2}q_0 l x_1 - \frac{1}{2}q_0 x_1^2$$

Balkenelement 2: $0 < x_2 < l_2$



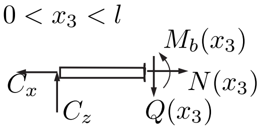
$$-N(x_2) + C_z \cos 30^\circ + C_x \cos 60^\circ = 0$$
$$N(x_2) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l\frac{1}{2}$$
$$N(x_2) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l$$

$$-Q(x_2) + C_z \sin 30^\circ - C_x \sin 60^\circ = 0$$
$$Q(x_2) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$Q(x_2) = -(\frac{1+\sqrt{3}}{2})\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l$$

$$l_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}l$$
$$M_b(x_2) + C_z \sin 30^\circ (l_2 - x_2) - C_x \sin 60^\circ (l_2 - x_2) = 0$$

$$M_b(x_2) =$$
$$-(-\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2})q_0 l\frac{1}{2}(l_2 - x_2) + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l\frac{\sqrt{3}}{2}(l_2 - x_2)$$
$$M_b(x_2) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l(\frac{2}{\sqrt{3}}l - x_2)$$

Balkenelement 3: $0 < x_3 < l$

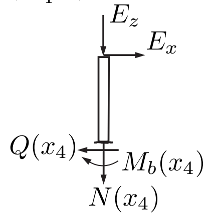


$$N(x_3) - C_x = 0$$
$$N(x_3) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l$$

$$Q(x_3) - C_z = 0$$
$$Q(x_3) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l$$

$$M_b(x_3) - C_z x_3 = 0$$
$$M_b(x_3) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2}q_0 l x_3$$

Balkenelement 4: $0 < x_4 < l$



$$N(x_4) + E_z = 0$$
$$N(x_4) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

$$Q(x_4) - E_x = 0$$
$$Q(x_4) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l$$

$$M_b(x_4) + E(l - x4) = 0$$
$$M_b(x_4) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+2} q_0 l(l - x_4)$$

(d)

Normalkräfte $N(x)$