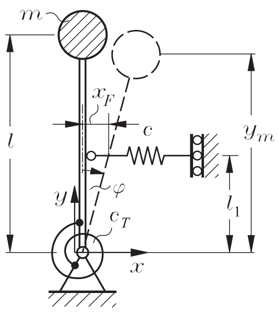
Tutorium

Aufgabe 148

(a)



Statisches Momentengleichgewicht um den Fußpunkt des Pendels:

$$0 = \sum M_{\text{äußere}} = M_{c_T} + F_c l_1 \cos\varphi - mgl \sin\varphi$$

mit

$$M_{c_T} = c_T \varphi\,,\ F_c = c l_1 \sin\varphi$$

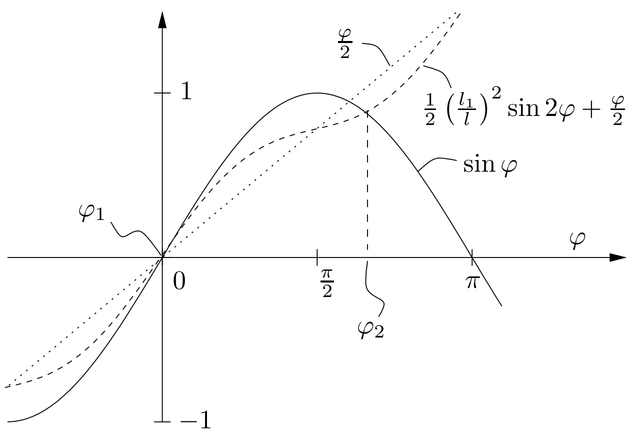
ergibt (mit $c_T = \frac{1}{2}mgl$, $c = \frac{mg}{l}$, $\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$):

$$0 = c_T\varphi + (c l_1^2 \cos\varphi - mgl)\sin\varphi$$

$$0 = \frac{1}{2}mgl\varphi + mgl\Big(\big(\frac{l_1}{l}\big)^2\cos\varphi - 1\Big)\sin\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\big(\frac{l_1}{l}\big)^2 \sin 2\varphi \qquad (1)$$

Eine Lösung der Gleichung (1) ist $\varphi = 0$. Die anderen können z.B. grafisch gewonnen werden. Die Lösungen φ_1 und φ_2 kann man hier ablesen:



(b) Betrachtet werden soll die Stabilität der Gleichgewichtslage bei $\varphi = 0$. Untersucht wird, was kleine Störungen dieser Gleichgewichtslage bewirken. Für kleine Ausschläge $\varphi \approx \varphi_1 = 0$ kann Gleichung (1) linearisiert werden:

$$\varphi = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\big(\frac{l_1}{l}\big)^2 2\varphi$$

$$\Big(\frac{1}{2} - \big(\frac{l_1}{l}\big)^2\Big)\varphi = 0$$

Für beliebige φ (im Rahmen der Linearisierungsvoraussetzung) ergibt sich demnach Gleichgewicht wenn gilt:

$$\frac{1}{2} - \big(\frac{l_{1,\text{krit}}}{l}\big)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad l_{1,\text{krit}} = \frac{\sqrt{2}}{2}l \qquad (2)$$

Das Gleichgewicht bei $\varphi = 0$ ist stabil, solange $l_1 > l_{1,\text{krit}}$ ist.

Aufgabe 155

(a) Eulersche Differentialgleichung fürs Knicken:

$(EIw'')'' + Fw'' = 0$
$w^{IV} + \lambda^2 w'' = 0$ mit $\lambda^2 = \frac{F}{EI}$

(b) Die Kraft aus der Temperaturerhöhung:

$\sigma_D = E\alpha_T \Delta T$
$F_D = EA_s\alpha_T\Delta T$

(c)

$$w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\lambda x + D \qquad (3)$$

$$w'(x) = -A\lambda\sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x + C\lambda \qquad (4)$$

$$w''(x) = -A\lambda^2\cos\lambda x - B\lambda^2\sin\lambda x = -\frac{1}{EI}M(x) \qquad (5)$$

$$w'''(x) = A\lambda^3\sin\lambda x - B\lambda^3\cos\lambda x = -\frac{1}{EI}Q(x) \qquad (6)$$

Die Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \qquad (7)$$

$$w'(0) = 0 \qquad (8)$$

$$w'(l) = 0 \qquad (9)$$

$$Q(l) = 0 = -EIw'''(l) = 0 \qquad (10)$$

aus 7 folgt: $A + D = 0 \Rightarrow D = -A$
aus 8 folgt: $B + C = 0 \Rightarrow C = -B$
aus 9 folgt: $-A\sin\lambda l + B\cos\lambda l + C \qquad = 0$
aus 10 folgt: $A\sin\lambda l - B\cos\lambda l \qquad = 0$

Es läßt sich also das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -\sin\lambda l & \cos\lambda l - 1 \\ \sin\lambda l & -\cos\lambda l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

aufstellen. Das System hat eine nichttriviale Lösung für

$$\det\begin{bmatrix} -\sin\lambda l & \cos\lambda l - 1 \\ \sin\lambda l & -\cos\lambda l \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Es bleibt $\sin\lambda l = 0$.
Die Lösung lautet also $\lambda l = n\pi$,
wobei das kleinst mögl. n = 1 ist.

Die kritische Kraft: $F_{krit} = EI\lambda^2 = \pi^2\frac{EI}{l^2}$

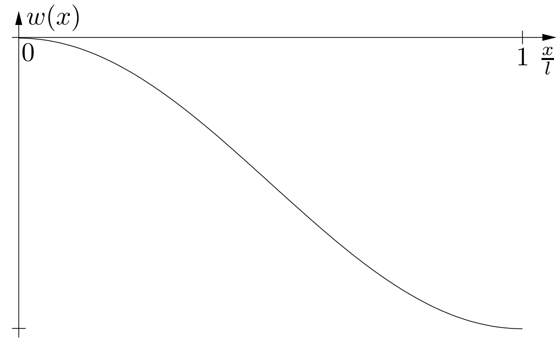
(d) Die kritische Temperatur:

$\Delta T_{krit} = \frac{F_{krit}}{EA_s\alpha_T}$

$T_2 = T_1 + \Delta T_{krit}$

$T_2 = T_1 + \frac{I\pi^2}{A_s l^2 \alpha_t}$

Hausaufgaben



Aufgabe 149

Allgemeine Differentialgleichung für Knickung:

$$w''''(x) + \lambda^2 w''(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^2 = \frac{F}{EI}$$

Ihre allgemeine Lösung:

$$w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + C\lambda x + D \tag{11}$$

wir benötigen davon die erste und dritte Ableitung:

$$w'(x) = -A\lambda\sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x + C\lambda \tag{12}$$
$$w'''(x) = A\lambda^3\sin\lambda x - B\lambda^3\cos\lambda x \tag{13}$$

Die zu diesem Problem gehörigen Randbedingungen lauten (vgl. Skizze in der Aufgabenstellung):

$$w(x=0) = 0 \tag{14}$$
$$w'(x=0) = 0 \tag{15}$$
$$w'(x=l) = 0 \tag{16}$$
$$Q(x=l) = 0 \quad \Rightarrow \quad w'''(x=l) = 0 \tag{17}$$

Aus Gl. (11) und Gl. (14) ergibt sich Gl. (18), aus Gl. (12) und Gl. (15) ergibt sich Gl. (19):

$$A + D = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad D = -A \tag{18}$$
$$\lambda B + \lambda C = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad B + C = 0 \tag{19}$$

Gl. (12) mit Gl. (16) ergibt Gl. (20) und Gl. (13) mit Gl. (17) Gl. (21):

$$-A\sin\lambda l + B\cos\lambda l + C = 0 \tag{20}$$
$$A\sin\lambda l - B\cos\lambda l = 0 \tag{21}$$

Addition von Gl. (20) und Gl. (21) ergibt mit Gl. (19):

$$C = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0\ . \tag{22}$$

Mit Gl. (22) und Gl. (18) lassen sich aus Gl. (21) die Knickbedingung Gl. (23) (Eigenwertgleichung) und aus Gl. (11) die spezielle Lösung unseres Problems Gl. (24) (die Eigenform) bestimmen:

$$A\sin\lambda l = 0 \tag{23}$$
$$w(x) = A(\cos\lambda x - 1) \tag{24}$$

Eine sinnvolle Lösung findet sich mit $A \neq 0$ und $\lambda \neq 0$ aus Gl. (23):

$$\sin\lambda l = 0 \quad \Rightarrow \lambda_n = n\frac{\pi}{l} \text{ mit } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Der kleinste Eigenwert λ_1 liefert die kritische Last:

$$\lambda_1^2 = \frac{F_{\text{krit}}}{EI} \quad \Rightarrow F_{\text{krit}} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI$$

Die zugehörige Eigenform lautet (aus Gl. (24)):

$$w(x) = A\Big(\cos(\pi\frac{x}{l}) - 1\Big)$$

Aufgabe 150

(a) Es wird zuerst Variante 3 betrachtet. Die Varianten 1 und 2 sind Spezialfälle von 3.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung sowie ihre Ableitungen lauten:

$$w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + Cx + D \tag{25}$$

mit $\lambda^2 = \frac{F}{EI}$.
Ableitungen:

$$w'(x) = -\lambda A\sin\lambda x + \lambda B\cos\lambda x + C \tag{26}$$
$$w''(x) = -\lambda^2 A\cos\lambda x - \lambda^2 B\sin\lambda x \tag{27}$$
$$w'''(x) = \lambda^3 A\sin\lambda x - \lambda^3 B\cos\lambda x \tag{28}$$

Die spezielle Lösung erhält man durch Anpassen der allgemeinen Lösung an die Randbedingungen. Am unteren Rand (Einspannung) gelten die beiden geometrischen Randbedingungen

$$w(0) = 0 \tag{29}$$
$$w'(0) = 0 \tag{30}$$

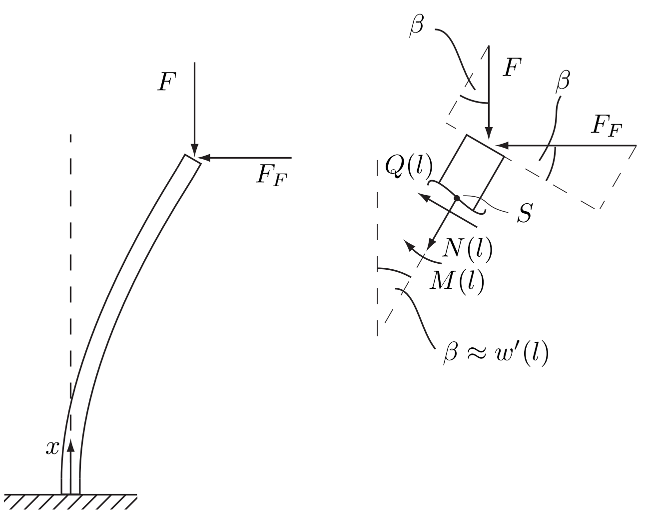
Mit Gleichung (25) und Gleichung (29):

$$A + D = 0 \tag{31}$$

Mit Gleichung (26) und Gleichung (30):

$$\lambda B + C = 0 \tag{32}$$

Freischnitt bei $x = l$ am verformten System:



$$\sum M_S = 0 \quad \Rightarrow \quad M(l) = 0 \tag{33}$$
$$w''(l) = 0 \tag{34}$$

Mit Gleichung (27) und Gleichung (34):

$$A\cos\lambda l + B\sin\lambda l = 0 \tag{35}$$

$$\sum Q(x) = 0$$
$$\Rightarrow \quad Q(l) + F_F\cos\beta - F\sin\beta = 0 \tag{36}$$

mit $F_F = cw(l)$

$$-EIw'''(l) + cw(l)\cos\beta - F\sin\beta = 0 \tag{37}$$

geometrische Linearisierung: $\cos\beta = 1$; $\sin\beta \approx \beta = w'(l)$

$$-EIw'''(l) + cw(l) - Fw'(l) = 0 \tag{38}$$

mit Gleichung (28), (26) und (25) folgt:

$$\begin{aligned} &- EI\lambda^3[A\sin\lambda l - B\cos\lambda l] \\ &+ c[A\cos\lambda l + B\sin\lambda l + Cl + D] \\ &- F\lambda[-A\sin\lambda l + B\cos\lambda l + \frac{C}{\lambda}] = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

Mit $F = EI\lambda^2$

$$\Rightarrow \quad c[\underbrace{A\cos\lambda l + B\sin\lambda l}_{=0 \text{ mit Gl. (35)}} + Cl + D] - EI\lambda^2 C = 0 \tag{40}$$
$$\Rightarrow \quad cCl + cD - EI\lambda^2 C = 0 \tag{41}$$
$$\Rightarrow \quad C\left(l - \frac{EI\lambda^2}{c}\right) + D = 0 \tag{42}$$

Weg 1:
Gleichungen (31), (32), (35) und (42) werden als lineares homogenes Gleichungssystem zusammengefasst. Es ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \cos(\lambda l) & \sin(\lambda l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l - \frac{EI\lambda^2}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

Damit nichttriviale Lösungen existieren, muss die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwinden:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \cos(\lambda l) & \sin(\lambda l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l - \frac{EI\lambda^2}{c} & 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \tag{44}$$

Diese Forderung ergibt nach kurzer Rechnung (per Hand oder mittels Mathematica o.ä.) die charakteristsche Gleichung:

$$\tan\lambda l = \lambda l \left(1 - \frac{(\lambda l)^2 EI}{cl^3}\right) \tag{45}$$

Für jede Lösung der charakteristischen Gleichung erhält man eine sog. Eigenform. Jede Eigenform (und die daraus resultierenden Schnittlasten) erfüllen alle 4 Randbedingungen und sind damit spezielle Lösungen der Differentialgleichung. Derjenige Wert F^*, der zum niedrigsten Eigenwert λ^* passt, heißt kritische Last.

Weg 2: Lösung per Handrechnung:
Bestimmung der Konstanten A, B, C, D: 4 Gleichungen (Gleichung (31), (32) (35) und (42)):
mit $F = EI\lambda^2$

$$\Rightarrow \quad D = C\left(\frac{EI\lambda^2}{c} - l\right) \tag{46}$$

(46) in (31)

$$\Rightarrow \quad A = -C\left(\frac{EI\lambda^2}{c} - l\right) \tag{47}$$

aus (32)

$$\Rightarrow \quad B = -\frac{C}{\lambda} \tag{48}$$

(47) und (48) in (35)

$$-C\left(\frac{EI\lambda^2}{c} - l\right)\cos\lambda l - \frac{C}{\lambda}\sin\lambda l = 0 \tag{49}$$

$$\Rightarrow C = 0 \text{ (triviale Lösung)} \tag{50}$$

oder

$$\tan\lambda l = -\lambda\left(\frac{EI}{cl^3} - l\right) \tag{51}$$

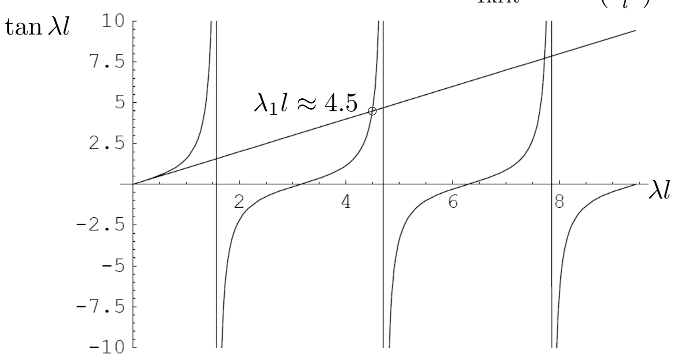
$$\tan\lambda l = \lambda l\left[1 - \frac{EI}{cl^3}(\lambda l)^2\right] \tag{52}$$

Eigenwertgleichung: Numerisch lösbar

Es gilt: $F_{1\text{krit}} = EI\lambda_1^2$

Fallunterscheidung:
Für $c \to \infty$ folgt Fall 1: $\underline{\tan\lambda = \lambda l}$.
Für $c \to 0$ folgt Fall 2: $\tan\lambda l \to -\infty$
$\hat{=}\underline{\cos\lambda l = 0}$
Fall 1:
Numerische beziehungsweise grafische Lösung:

$$\Rightarrow \quad F_{1\text{krit}} \approx EI\left(\tfrac{4{,}5}{l}\right)^2$$



Fall 2:

$$\cos\lambda l = 0 \tag{53}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_n l = (2n-1)\frac{\pi}{2} \tag{54}$$

$$\lambda_1 l = \frac{\pi}{2} \tag{55}$$

$$\Rightarrow \quad F_{1\text{ krit}} = EI\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \tag{56}$$

(b)

$$F_{\text{krit}1} = F_{\text{krit}2} \tag{57}$$

$$\lambda_{11}^2 = \lambda_{12}^2 \tag{58}$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} \tag{59}$$

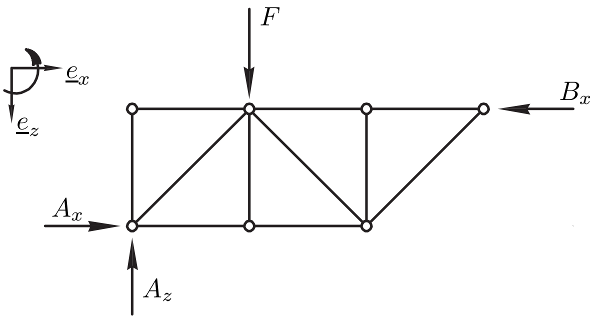
$$\Rightarrow \quad \frac{4,5}{l_1} \approx \frac{\pi}{2l_2} \tag{60}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{9}{\pi} \approx 2,86 \tag{61}$$

Aufgabe 154

(a) Bestimmung der Lagerreaktionen

Freischnitt:



$$\sum M^{(A)} = 0 = -Fa + B_x a \quad \Rightarrow \underline{B_x = F} \tag{62}$$

$$\sum F_x = 0 = A_x - B_x \quad \Rightarrow \underline{A_x = B_x = F} \tag{63}$$

$$\sum F_z = 0 = F - A_z \quad \Rightarrow \underline{A_z = F} \tag{64}$$

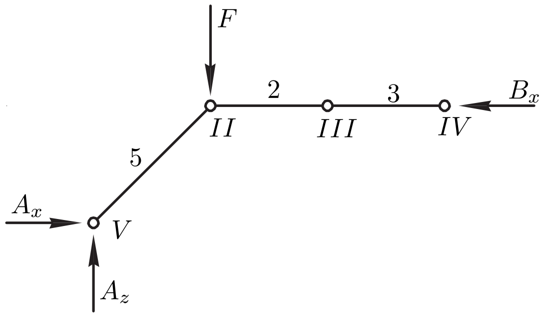
(b) Bestimmung der Stabkräfte:

offensichtliche Nullstäbe:

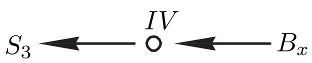
1,4,6,7,8,9,10,11

(1,4 da Knoten I unbelastet; 6 da an Knoten VI die Stäbe 10 und 11 in die gleiche Richtung zeigen; 8 da an Knoten III die Stäbe 2 und 3 in die gleiche Richtung zeigen; 9 da an Knoten IV die Lagerkraft B_x in Richtung des Stabes 3 weist; 7,11 da Knoten VII jetzt unbelastet ist; 10 ist jetzt am Konten VI frei)

Freischnitt des verbleibenden Systems:



Knoten IV:

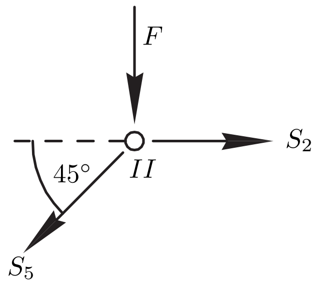


$$\sum F_x = 0 = -S_3 - B_x \quad \Rightarrow \underline{S_3 = -B_x = -F} \tag{65}$$

Knoten III:

$$\sum F_x = 0 = -S_2 + S_3 \quad \Rightarrow \underline{S_2 = S_3 = -F} \tag{66}$$

Knoten II:



$$\sum F_x = 0 = S_2 - S_5 \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \quad \underline{S_5 = S_2\sqrt{2} = -F\sqrt{2}} \tag{67}$$

(c) Knickproblem
<u>Lösungsvariante 1:</u>

Druckstäbe	Länge
$S_2 = -F$	a
$S_3 = -F$	a
$S_5 = -\sqrt{2}F$	$\sqrt{2}a$

(68)

Bestimmung der kritischen Last F_{krit}:
Die Druckbelastung der Stäbe in einem Fachwerk entspricht der Belastung des Euler-Knickstabes der Länge l mit Fest-Los-Lagerung.

$$\Rightarrow \quad F_{\text{krit}} = EI\frac{\pi^2}{l_r^2}$$

mit $l_r = l$

- F_{krit} für Stäbe 2 und 3:

$$F_{\text{krit}} = EI\frac{\pi^2}{a^2}$$

- F_{krit} für Stab 5:

$$F_{\text{krit}} = EI\frac{\pi^2}{2a^2}$$

Stab 5 würde zuerst ausknicken, da er am am stärksten belastet wird und er auch der längste Stab ist.

<u>Lösungsvariante 2:</u>

Differentialgleichung für das Knickproblem:

$$w'''' + k^2 w'' = 0 \qquad \text{mit} \quad k^2 = \frac{F}{EI} \tag{69}$$

allgemeine Lösung

$$w(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 x + C_4 \tag{70}$$

$$w'(x) = -C_1 k \sin kx + C_2 k \cos kx + C_3 \tag{71}$$

$$w''(x) = -C_1 k^2 \cos kx - C_2 k^2 \sin kx \tag{72}$$

Randbedingungen:

$$w''(0) = 0 \Rightarrow -C_1 k^2 = 0 \quad \Rightarrow \underline{C_1 = 0} \tag{73}$$

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \underline{C_4 = -C_1 = 0} \tag{74}$$

$$w(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sin kx + C_3 l = 0 \tag{75}$$

$$w''(l) = 0 \Rightarrow -C_2 k^2 \sin kl = 0 \tag{76}$$

$C_2 = 0$ würde die Gleichung erfüllen, jedoch ergäbe sich dann über Gleichung (75) auch C_3 zu Null. Das stellt somit die triviale Lösung $w(x) = 0$ dar, welche hier nicht untersucht werden soll. Es muß vielmehr gelten:

$$\sin kl = 0 \tag{77}$$

$$\Rightarrow kl = n\pi \qquad \text{mit } n = 0, 1, 2... \tag{78}$$

Dabei ergibt sich für $k = 0$ über Gleichung (69) auch die Belastung F zu Null. Stattdessen soll hier der Fall $n = 1$ untersucht werden, da er die kleinste kritische Last F_{krit} zur Folge hat. Es folgt somit für $n = 1$:

$$\Rightarrow k = \frac{\pi}{l} \tag{79}$$

$$\tag{80}$$

mit Gleichung (69) ergibt sich:

$$k^2 = \frac{\pi^2}{l^2} = \frac{F_{krit}}{EI} \Rightarrow F_{krit} = EI\frac{\pi^2}{l^2} \tag{81}$$

mit der Länge $l = \sqrt{2}a$ gilt:

$$F_{krit} = EI\frac{\pi^2}{2a^2} \tag{82}$$