Tutorium

Aufgabe 135

(a) Bestimmung der Hauptspannungen:

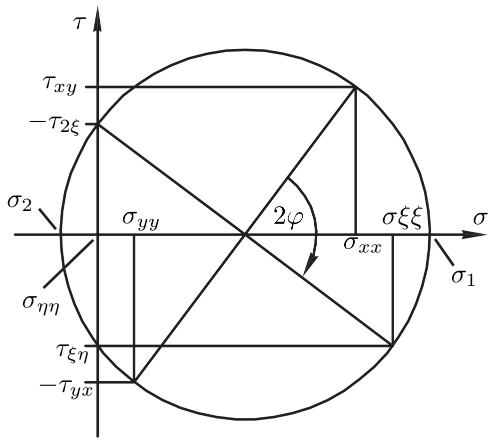
$$\begin{aligned}\sigma_{1/2} &= \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\\ &= \frac{7+1}{2}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \pm \sqrt{\left(\frac{7-1}{2}\right)^2 + 4^2}\quad\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\\ &= 4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \pm 5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\end{aligned}$$

$$\sigma_1 = 9\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \qquad \sigma_2 = -1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

(b) Maximale Schubspannung τ_{max}:

$$\begin{aligned}\tau_{max} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{7-1}{2}\right)^2 + 4^2}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\\ &= 5\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\end{aligned}$$

(c) Mohrscher Spannungskreis:



(d) Normalspannungen $\sigma_{\xi\xi}$ und $\sigma_{\eta\eta}$ sowie Schubspannung $\tau_{\xi\eta}$ für Drehung um den Winkel φ:

- die Größen können am Mohrschen Kreis abgelesen werden. Oder
- rechnerisch ermittelt werden:

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi\\ &= 4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} + 0\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} + 4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\\ &= 8\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\eta\eta} &= \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\varphi - \tau_{xy}\sin 2\varphi\\ &= 4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} - 0\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} - 4\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\\ &= 0\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\xi\eta} &= -\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi\\ &= -3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} + 0\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\end{aligned}$$

Aufgabe 132

(a)

Es handelt sich um einen ebenen reinen Schubzustand. Die Hauptspannungen sind daher

$$\sigma_I = \tau_0 \tag{1}$$
$$\sigma_{II} = -\tau_0 \tag{2}$$
$$\sigma_{III} = 0 \tag{3}$$

(b)

Es handelt sich um einen ebenen Spannungszustand. Die Hauptspannungen sind

$$\sigma_I = \frac{1}{2}\left(\sigma_0 + \sqrt{\sigma_0^2 + 4\tau_0^2}\right) \tag{4}$$
$$\sigma_{II} = \frac{1}{2}\left(\sigma_0 - \sqrt{\sigma_0^2 + 4\tau_0^2}\right) \tag{5}$$
$$\sigma_{III} = 0 \tag{6}$$

(c)

Da σ_{ij} bereits Diagonalform hat, können die Hauptspannungen für diesen einachsigen Zugzustand auf der Hauptdiagonalen abgelesen werden:

$$\sigma_I = \sigma_0 \tag{7}$$
$$\sigma_{II} = 0 \tag{8}$$
$$\sigma_{III} = 0 \tag{9}$$

(d)

Wie in der vorherigen Teilaufgabe sind die Hauptspannungen für diesen hydrostatischen Spannungszustand auf der Hauptdiagonalen einfach ablesbar. Es ist also

$$\sigma_I = p_0 \tag{10}$$
$$\sigma_{II} = p_0 \tag{11}$$
$$\sigma_{III} = p_0 \tag{12}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 140

Vorbetrachtung: Der eingeprägte Spannungszustand im Element wird durch die Größen σ_{xx}, σ_{yy} und τ_{xy} beschrieben. Es gelten folgende allgemeine Beziehungen:

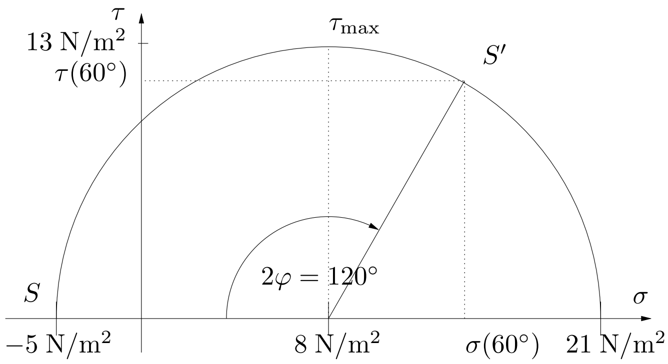
$$\sigma(\varphi) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi \tag{13}$$

$$\tau(\varphi) = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \tag{14}$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2} \tag{15}$$

(a) Konstruktion des Mohrschen Spannungskreises und grafische Lösung:

1. Koordinatensytem zeichnen: Horizontal die σ-Achse; vertikal die τ-Achse. σ_{xx} und σ_{yy} auf der σ-Achse eintragen.
2. τ_{xy} positiv über σ_{xx} und negativ unter σ_{yy} abtragen. Die entstandenen Endpunkte miteinander verbinden und diese Strecke als Durchmesser des Kreises identifizieren. Der Kreismittelpunkt ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen σ_{xx} und σ_{yy} auf der σ-Achse.
3. Kreisbogen um den Mittelpunkt schlagen.
4. Trage den Winkel 2φ vom Punkt S (Spannung im Schnitt senkrecht zur x-Achse) zum Punkt S' im Uhrzeigersinn (mathematisch negativer Drehsinn) um den Mittelpunkt an.
5. σ und τ am Punkt S' ablesen.



Der Mohrschen Spannungskreis (Mittelpunkt und Durchmesser) kennzeichnet einen bestimmten Spannungszustand.[1]

Ein bestimmter Punkt am Umfang des Kreises bezeichnet die Spannungen im Schnitt unter einem bestimmten Schnittwinkel:[2]

Der Punkt S mit $\sigma = \sigma_{xx} = -5\,\mathrm{N/m^2}$, $\tau = \tau_{xy} = 0$ bezeichnet die Spannungen in einem Schnitt senkrecht zur x-Achse.

[1] Der Spannungszustand ist objektiv im Material vorhanden, unabhängig davon, wie der Beobachter sich einen Schnitt durch das Material denkt.

[2] Die Spannungen in einem gedachten Schnitt hängen von der Orientierung des gedachten Schnitts bzw. der Wahl des Koordinatensystems ab.

Der Punkt S' mit $\sigma = \sigma(\varphi)$, $\tau = \tau(\varphi)$ bezeichnet die Spannungen in einem Schnitt unter dem Winkel φ zur x-Achse.

Hier lesen wir ab:

$$\sigma(\varphi = 60°) = 14{,}5\,\mathrm{N/m^2}$$
$$\tau(\varphi = 60°) = 11{,}25\,\mathrm{N/m^2}$$

Rechnerische Lösung:

Normalspannung:

$$\sigma(\varphi) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi \tag{16}$$

$$\text{hier:}\quad \sigma(\varphi) = \boxed{14{,}5\,\mathrm{N/m^2}} \tag{17}$$

Schubspannung:

$$\tau(\varphi) = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \tag{18}$$

$$\text{hier:}\quad \tau(\varphi) = \boxed{11{,}25\,\mathrm{N/m^2}} \tag{19}$$

(b) $\tau_{\max} =?$; $\varphi(\tau_{\max}) =?$:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2} \tag{20}$$

$$\text{hier:}\quad \tau_{\max} = \boxed{13\,\mathrm{N/m^2}} \tag{21}$$

Der zugehörige Winkel ergibt sich aus der Skizze des Mohrschen Kreises bzw. aus der Gleichung für die Schubspannung:

aus der Skizze:

$$\varphi(\tau_{\max}) = +45°$$

Aus der notw. Bed. für ein Extremum erhält man:

$$\frac{\partial \tau(2\varphi)}{\partial(2\varphi)} \stackrel{!}{=} 0 \tag{22}$$

$$\tan 2\varphi = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\tau_{xy}} \tag{23}$$

hier

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} \pm n\pi \Longrightarrow \boxed{\varphi = \tfrac{\pi}{4} \pm n\tfrac{\pi}{2}}$$

(c) Hauptspannungen: Aus der Skizze liest man ab, dass die Richtungen, unter denen die Schubspannungen verschwinden, senkrecht aufeinander stehen. Außerdem liest man aus Skizze ab:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_{\max} = \sigma_{yy} \\ &= 21\,\mathrm{N/m^2} \text{ bei } 2\varphi = 180° \\ \sigma_2 &= \sigma_{\min} = \sigma_{xx} \\ &= -5\,\mathrm{N/m^2} \text{ bei } 2\varphi = 0°\end{aligned}$$

oder

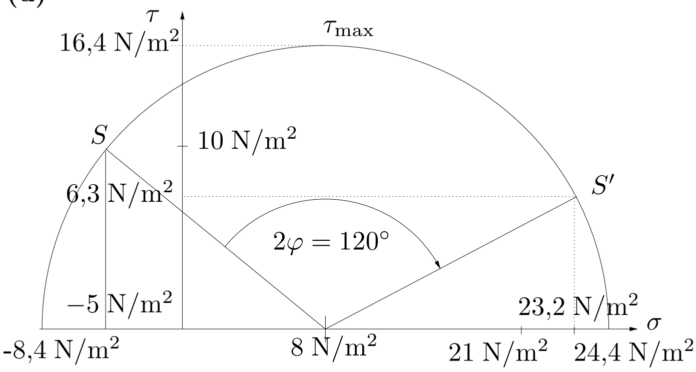
$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2}} \tag{24}$$

Hauptspannungen = Mittelpunkt ± Radius

hier: $\tau_{xy} = 0$ und damit:

$$\boxed{\sigma_1 = \sigma_{xx}} \quad \text{und} \quad \boxed{\sigma_2 = \sigma_{yy}} \quad \text{s.o.} \tag{25}$$

(d)



Alles nochmals speziell für $\sigma_{xx} = -5\,\text{N/m}^2$, $\sigma_{yy} = 21\,\text{N/m}^2$, $\tau_{xy} = 10\,\text{N/m}^2$ liefert

$$\begin{aligned}
\sigma(2\varphi = 120°) &= 23{,}16\,\text{N/m}^2 \\
\tau(2\varphi = 120°) &= 6{,}26\,\text{N/m}^2 \\
\sigma_1 &= 24{,}4\,\text{N/m}^2 \\
\sigma_2 &= \text{-}8{,}4\,\text{N/m}^2 \\
\tau_{\max} &= 16{,}4\,\text{N/m}^2
\end{aligned}$$

φ für Hauptnormalspannungen ?
Bedingung:

$$\tau(\varphi) = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi = 0$$

$\Longrightarrow \tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} = \frac{20}{-5-21} = -\frac{20}{26}$
$\Longrightarrow 2\varphi = \text{-}37{,}6° + n\pi \Longrightarrow \boxed{\varphi = \text{-}18{,}8° + n\frac{\pi}{2}}$

Hauptspannungen und zugehörige Winkel:

$$(\sigma_{\min} = \text{-}8{,}4\,\text{N/m}^2; -18,8°) \tag{26}$$
$$(\sigma_{\max} = 24{,}4\,\text{N/m}^2; +71,2°) \tag{27}$$

Gesucht ist nun φ für $\tau_{\max}$:

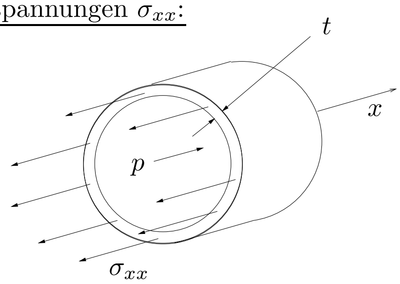
$$\tan 2\varphi = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2\tau_{xy}} \tag{28}$$
$$= \frac{26}{20} \tag{29}$$

Da nur das Maximum gesucht ist:

$$2\varphi = 52{,}4° + n2\pi \tag{30}$$
$$\varphi = 26{,}2° + n\pi \tag{31}$$

Aufgabe 142

(a) Längsspannungen σ_{xx}:



Kreisringfläche:

$$\begin{aligned}
A_K &= \pi(r_a^2 - r_i^2) \quad \text{mit} \quad r_a = R + t; \quad r_i = R \\
&= \pi(r_a - r_i)(r_a + r_i) \\
&= \pi(R + t - R)(R + t + R) = \pi t(2R + t) \\
A_K &= 2\pi Rt + \pi t^2 \approx 2\pi Rt \quad \text{für} \quad t \ll l, t \ll R
\end{aligned}$$

Deckelfläche:

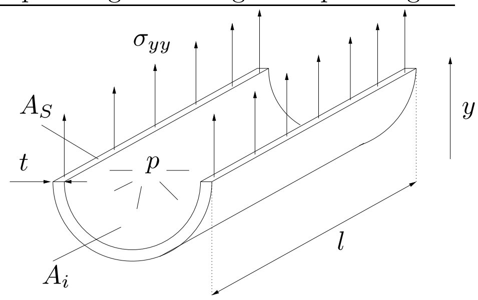
$$A_D = \pi r_i^2 = \pi R^2$$

Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}
\sum F_x = 0 &= -\sigma_{xx} A_K + pA_D \\
0 &= -\sigma_{xx} 2\pi Rt + p\pi R^2 \\
&\Longrightarrow \boxed{\sigma_{xx} = \frac{1}{2}\frac{R}{t}p}
\end{aligned}$$

mit $t = 1 \cdot 10^{-3}$m; $p = 2 \cdot 10^5$N/m^2; $R = \frac{1}{2}$m folgt $\sigma_{xx} = 5 \cdot 10^7$N/m^2

Umfangsspannungen = Tangentialspannungen:



Schnittfläche und Zylinderinnenfläche[3]:

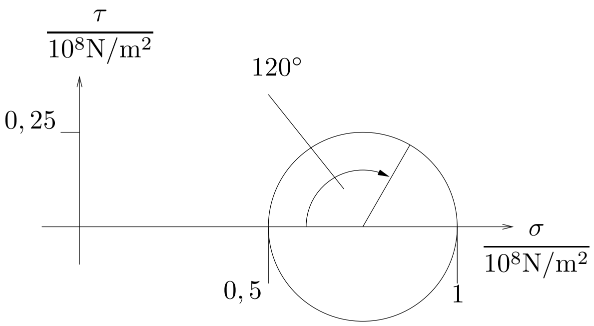
$$\begin{aligned}
A_S &= 2lt \\
A_i &= 2Rl
\end{aligned}$$

Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}
\sum F_y = 0 &= \sigma_{yy} A_S - pA_i \\
0 &= \sigma_{yy} 2lt - p2Rl \\
&\Longrightarrow \boxed{\sigma_{yy} = \frac{R}{t}p = 2\sigma_{xx}} = 1 \cdot 10^8\text{N/m}^2
\end{aligned}$$

(b)

[3] projizierte Fläche! (siehe Erklärung weiter unten im Text)

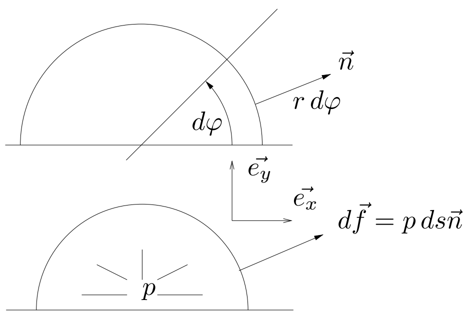


(c) grafische Lösung: $\sigma(\varphi = 60°) = 0,875 \cdot 10^8 \mathrm{N/m^2}$; $\tau(\varphi = 60°) = 0,2165 \cdot 10^8 \mathrm{N/m^2}$
rechnerische Lösung:

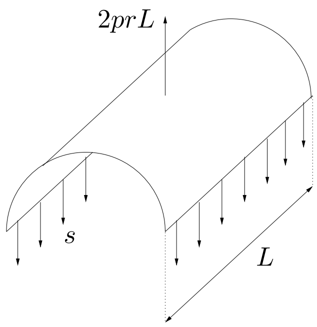
$$\begin{aligned}
\sigma(\varphi) &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\
&= \frac{1,5 \cdot 10^8}{2} \mathrm{N/m^2} - \frac{0,5 \cdot 10^8}{2} \mathrm{N/m^2} \cos 120° + 0 \\
&\boxed{\sigma(\varphi = 60°) = 0,875 \cdot 10^8 \mathrm{N/m^2}} \\
\tau(\varphi) &= -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi \\
&= -\frac{0,5 \cdot 10^8}{2} \mathrm{N/m^2} \sin 120° + 0 \\
&\boxed{\tau(\varphi = 60°) = 0,2165 \cdot 10^8 \mathrm{N/m^2}}
\end{aligned}$$

(d) aus der Skizze des MOHRschen Kreises ist ersichtlich, dass $\tau_{max} = 0,25 \cdot 10^8 \mathrm{N/m^2}$ bei $2\varphi = 90°$ herrscht.

Nachtrag: Erklärung warum die projizierte Fläche relevant ist:



$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_{<\vec{e_i}>} \\
d\vec{f} &= pr\, d\varphi \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_{<\vec{e_i}>} \\
\vec{f} &= \int d\vec{f} = pr \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} d\varphi \\
&= pr \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{bmatrix}_0^\pi = pr \begin{pmatrix} 0 \\ 1+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$



$$[\vec{f}] = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; \quad [prL] = 1\mathrm{N}; [s] = 1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

GGB: $2prL = s2L \Longrightarrow s = pr$

$$\boxed{\sigma_U = \frac{s}{t} = \frac{pr}{t}}$$