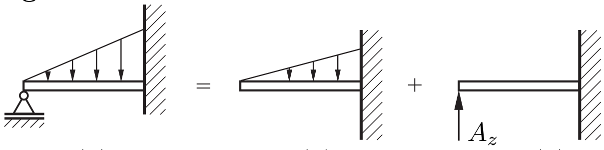
Tutorium

Aufgabe 112



$w(x) \quad = \quad w_{\mathrm{I}}(x) \quad + \quad w_{\mathrm{II}}(x)$

aus Dubbel:

$$w_{\mathrm{I}}(x) = \frac{q_0 l^4}{120\,EI}\left[4 - 5\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^5\right] \tag{1}$$

$$w_{\mathrm{II}}(x) = \frac{(-A_z)\,l^3}{6\,EI}\left[2 - 3\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \tag{2}$$

$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{120\,EI}\left[4 - 5\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^5\right] - \frac{A_z\,l^3}{6\,EI}\left[2 - 3\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \tag{3}$$

Geometrische Verträglichkeitsbedingung:

$$0 = w\,(x=0) = \frac{4 q_0 l^4}{120\,EI} - \frac{A_z\,l^3}{3\,EI} \tag{4}$$

Daraus folgt A_z zu:

$$A_z = \frac{q_0 l^4}{30\,EI}\cdot\frac{3EI}{l^3} = \frac{q_0 l}{10} \tag{5}$$

Verdrehwinkel:
mit $w'(x) = w'_I(x) + w'_{II}(x)$

$$w'(x) = \frac{q_0 l^3}{120\,EI}\left[5\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1\right] \tag{6}$$

$$\varphi_A = w'(0) = \frac{q_0 l^3}{120\,EI} \tag{7}$$

Aufgabe 124

(a) Für das Biegemoment gibt es drei Bereiche zu untersuchen. Das System ist statisch bestimmt.

Bereich I: $\quad 0 < x < a$

$$-q_{\mathrm{I}} = {Q_{\mathrm{I}}}' \Rightarrow {Q_{\mathrm{I}}}' = 0 \Rightarrow Q_{\mathrm{I}} = c_1 \tag{8}$$

$${M_{\mathrm{I}}}' = Q_{\mathrm{I}} \Rightarrow {M_{\mathrm{I}}}' = c_1 \Rightarrow M_{\mathrm{I}} = c_1 x + c_2 \tag{9}$$

Bereich II: $\quad a < x < l-a$

$$-q_{\mathrm{II}} = {Q_{\mathrm{II}}}' \Rightarrow {Q_{\mathrm{II}}}' = 0 \Rightarrow Q_{\mathrm{II}} = c_3 \tag{10}$$

$${M_{\mathrm{II}}}' = Q_{\mathrm{II}} \Rightarrow {M_{\mathrm{II}}}' = c_3 \Rightarrow M_{\mathrm{II}} = c_3 x + c_4 \tag{11}$$

Bereich III: $\quad l-a < x < l$

$$-q_{\mathrm{III}} = {Q_{\mathrm{III}}}' \Rightarrow {Q_{\mathrm{III}}}' = 0 \Rightarrow Q_{\mathrm{III}} = c_5 \tag{12}$$

$${M_{\mathrm{III}}}' = Q_{\mathrm{III}} \Rightarrow {M_{\mathrm{III}}}' = c_5 \Rightarrow M_{\mathrm{III}} = c_5 x + c_6 \tag{13}$$

Somit ist es ersichtlich, dass pro Bereich 2 Konstanten zu berechnen sind.(3 Bereiche liegen vor, d.h. $3\cdot 2 = 6$ Konstanten: c_i mit $i = 1, 2..6$)

Für die Berechnung dieser 6 Konstanten braucht man 6 linear unabhängige Gleichungen. Diese Gleichungen ergeben sich aus den Rand-und Übergangsbedingungen:

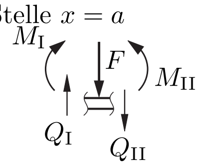
Randbedinungen

$$M_{\mathrm{I}}\,(x=0) = 0 \tag{14}$$

$$M_{\mathrm{III}}\,(x=l) = 0 \tag{15}$$

Übergangsbedingungen

Freischnitt an der Stelle $x = a$

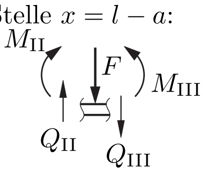


Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben folgende Übergangsbedingungen:

$$M_{\mathrm{I}}\,(x=a) \;=\; M_{\mathrm{II}}\,(x=a) \tag{16}$$

$$Q_{\mathrm{I}}\,(x=a) \;=\; F + Q_{\mathrm{II}}\,(x=a) \tag{17}$$

Freischnitt an der Stelle $x = l - a$:



Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben folgende Übergangsbedingungen:

$$M_{\mathrm{II}}\,(x=l-a) \;=\; M_{\mathrm{III}}\,(x=l-a) \tag{18}$$

$$Q_{\mathrm{II}}\,(x=l-a) \;=\; F + Q_{\mathrm{III}}\,(x=l-a) \tag{19}$$

Somit liegen jetzt 6 Gleichungen für die Berechnung der Konstanten c_i $(i = 1, 2..6)$ vor. Es können alle diese 6 Konstanten eindeutig bestimmt werden. (Die 6 Gleichungen sind linear unabhängig voneinander.)

$$\text{Aus (14) in (9) folgt}: \; c_2 = 0 \tag{20}$$

$$\text{Aus (15) in (13) folgt}: \; c_6 = -c_5 l \tag{21}$$

$$\text{Aus (16) folgt}: \; c_1 a + c_2 = c_3 a + c_4 \tag{22}$$
$$\text{Aus (17) folgt}: \; c_1 = F + c_3 \tag{23}$$
$$\text{Aus (18) folgt}: \; c_3(l-a) + c_4 = c_5(l-a) + c_6 \tag{24}$$
$$\text{Aus (19) folgt}: \; c_3 = F + c_5 \tag{25}$$

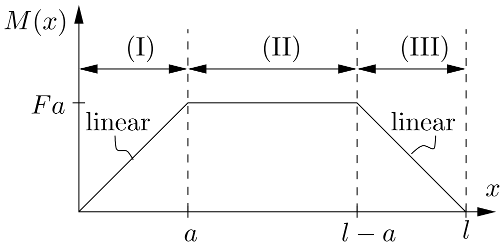
Die Lösungen dieses Gleichungssystems lauten:

$$c_1 = F \quad , \quad c_2 = 0 \quad , \quad c_3 = 0 \tag{26}$$
$$c_4 = Fa \; , \quad c_5 = -F \; , \quad c_6 = Fl \tag{27}$$

Somit erhält man für das jeweilige Biegemoment indem man die Konstanten einsetzt:

$$M_{\mathrm{I}}(x) = Fx \tag{28}$$
$$M_{\mathrm{II}}(x) = Fa = \text{const.} \geq 0 \tag{29}$$
$$M_{\mathrm{III}}(x) = F(l-x) \tag{30}$$

Graphische Darstellung:

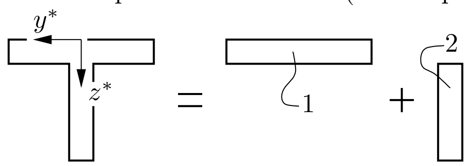


Somit ist das Biegemoment im zweiten Bereich (entlang des ganzen Bereichs) maximal und konstant.

$$M_{\max} = Fa = 3750\,\mathrm{N\,m} \tag{31}$$

Das ist der Maximalwert des Biegemomentes im Balken (um die y-Achse).

(b) Flächenmittelpunkt des T-Profils (Balkenquerschnitt)



Flächenmittelpunkt in y^*-Richtung:

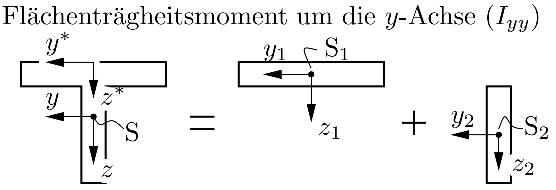
$$y_S^* = 0 \tag{32}$$

Flächenmittelpunkt in z^*-Richtung:

Körper	y_i^*	z_i^*	A_i	$y_i^* A_i$	$z_i^* A_i$
$i=1$	0	$\frac{t}{2}$	bt	0	$\frac{1}{2}bt^2$
$i=2$	0	$t+\frac{c}{2}$	ct	0	$ct(t+\frac{c}{2})$
$\sum$	—	—	$(b+c)t$	0	$\frac{1}{2}bt^2 + ct(t+\frac{c}{2})$

$$z_S^* = \frac{\sum_{i=1}^2 A_i\, Z_i^*}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{\frac{bt}{2} + c\,t + \frac{c^2}{2}}{b+c} \tag{33}$$
$$= \frac{b\,t + 2c\,t + c^2}{2(b+c)} \approx 24{,}642\mathrm{mm} \tag{34}$$

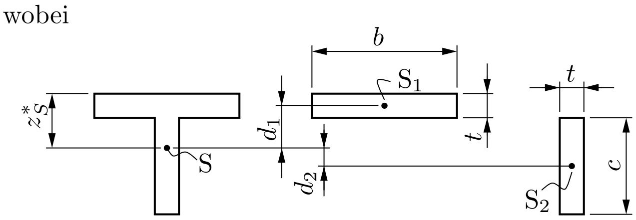
(c) Flächenträgheitsmoment um die y-Achse (I_{yy})



Mit dem Satz von Steiner:

$$I_{yy} = I_{y_1y_1} + d_1^2 A_1 + I_{y_2y_2} + d_2^2 A_2 \tag{35}$$

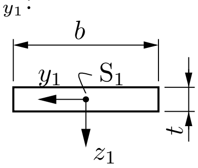
wobei



woraus ersichtlich ist, dass:

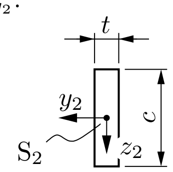
$$A_1 = b\,t\,, A_2 = c\,t\,,\, d_1 = z_S^* - \frac{t}{2} = \frac{c}{2}\,\frac{c+t}{b+c} \text{ und}$$
$$d_2 = t + \frac{c}{2} - z_S^* = \frac{b}{2}\,\frac{c+t}{b+c}$$

Berechnung von $I_{y_1y_1}$:



$$I_{y_1y_1} = \int_{(A_1)} z_1^2\, d\,A_1 \tag{36}$$
$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z_1^2 d\,z_1 d\,y_1 = \frac{1}{12} b\,t^3 \tag{37}$$

Berechnung von $I_{y_2y_2}$:



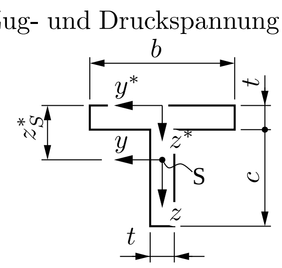
Analog gilt folgendes:

$$I_{y_2y_2} = \int_{(A_2)} z_2^2\, d\,A_2 \tag{38}$$
$$= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z_2^2 d\,z_2 d\,y_2 = \frac{1}{12} t\,c^3 \tag{39}$$

jetzt wird alles $I_{y_1y_1}, I_{y_2y_2}, A_1, A_2, d_1, d_2$) in Gleichnung (35) gesetzt.

$$I_{yy} = \frac{1}{12}\,b\,t^3 + \frac{c^2}{4}\Big(\frac{c+t}{b+c}\Big)^2 b\,t \tag{40}$$
$$+ \frac{1}{12}\,t\,c^3 + \frac{b^2}{4}\Big(\frac{c+t}{b+c}\Big)^2 c\,t \tag{41}$$
$$= \frac{1}{4}\,t\Big[\frac{1}{3}\,(b\,t^2 + c^3) + b\,c\,\frac{(c+t)^2}{b+c}\Big] \tag{42}$$
$$\approx 1{,}409 \cdot 10^6 \mathrm{mm}^4 \tag{43}$$

(d) Maximale Zug- und Druckspannung im Maschinenteil



$$\boxed{\sigma(z) = \frac{M}{I_{yy}}\, z} \tag{44}$$

(M ist hier das Moment um die y-Achse)

Flächenträgheitsmoment aus Gleichung (42):

$$I_{yy} = \frac{1}{4}\, t \left[\frac{1}{3}\left(b\, t^2 + c^3\right) + b\, c\, \frac{(c+t)^2}{b+c}\right] = \text{konst.} \tag{45}$$

$\sigma(z) = \sigma_{max}(z)$ bei $M = M_{max}$ und $z = z_{max}$.

M_{max} aus Frage **(b)** Gleichung (31):

$$M_{max} = F\, a \tag{46}$$

z_{max} kann aus der Skizze zur Geometrie abgelesen werden:

unterer Rand des T-Profils (Zugbeanspruchung): $$z_{max} = t + c - z_S^* \tag{47}$$

oberer Rand des T-Profils (Druckbeanspruchung): $$z_{max} = -z_S^* \tag{48}$$

Am unteren Rand des Profils:

$$\sigma_{max,Zug} = \frac{Fa}{I_{yy}}\left(t + c - z_S^*\right) \approx 165,963\, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \tag{49}$$

Am oberen Rand des Profils:

$$\sigma_{max,Druck} = \frac{Fa}{I_{yy}}\left(-z_S^*\right) \approx -65,583\, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \tag{50}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 113

(a)

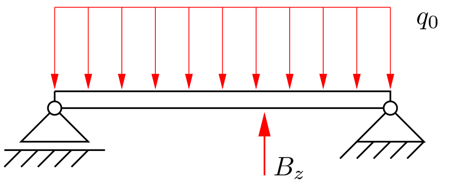
(b)

(c)

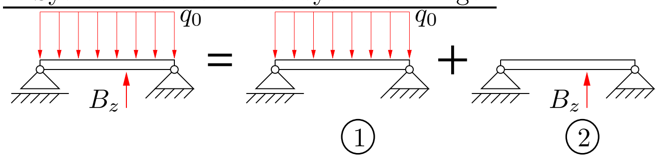
1. Statisch bestimmtes Ersatzsystem:

Ersetze eine Fesselung durch ihre unbekannte Reaktionslast. Diese wird nun im folgenden als äußere Last behandelt (als wenn sie bekannt wäre).

Zum Beispiel wird das mittlere Lager B durch die Kraft B_z ersetzt und wir erhalten folgendes statisch bestimmte Ersatzsystem:



2. System in einfache Teilsysteme zerlegen



Superpositionsprinzip: Die Gesamtverformung ergibt sich aus der Summe der Verformung der Teilsysteme:

$$w(x) = w_1(x) + w_2(x) \tag{51}$$

3. Lösungen der einfachen Teilsysteme z.B. aus Tabellenwerk (Hütte, Dubbel o. ä.):

$$w_1(x) = \frac{q_0 l^4}{EI}\left\{\frac{1}{24}\left[\frac{x}{l}\right]^4 - \frac{1}{12}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{1}{24}\left[\frac{x}{l}\right]\right\} \tag{52}$$

$$\Rightarrow\ w_1(\frac{2}{3}l) = \frac{11}{972}\frac{q_0 l^4}{EI} \tag{53}$$

$$w_2(x) = \begin{cases} w_{2\,\mathrm{I}}(x) & ; x < \frac{2}{3}l \\ w_{2\,\mathrm{II}}(x) & ; x > \frac{2}{3}l \end{cases},\quad \text{mit} \tag{54}$$

$$w_{2\,\mathrm{I}}(x) = \frac{B_z l^3}{EI}\left\{\frac{1}{18}\left[\frac{x}{l}\right]^3 - \frac{4}{81}\left[\frac{x}{l}\right]\right\} \quad \text{und} \tag{55}$$

$$w_{2\,\mathrm{II}}(x) = \frac{B_z l^3}{EI}\left\{-\frac{1}{9}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{1}{3}\left[\frac{x}{l}\right]^2 - \frac{22}{81}\left[\frac{x}{l}\right] + \frac{4}{81}\right\} \tag{56}$$

$$\Rightarrow\ w_2(\frac{2}{3}l) = -\frac{4}{243}\frac{B_z l^3}{EI} \tag{57}$$

4. Geometrische Verträglichkeitsbedingung (Zwangsbedingung)

$$w(\frac{2}{3}l) = 0 \tag{58}$$

Die Auswertung der Zwangsbedingung liefert uns die unbekannte Reaktionskraft B_z:

$$w_1(\frac{2}{3}l) + w_2(\frac{2}{3}l) \stackrel{!}{=} 0 \tag{59}$$

$$\Rightarrow\ B_z = \frac{11}{16}q_0 l \tag{60}$$

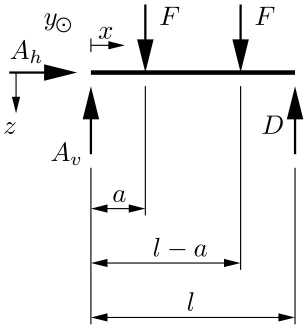
(d) Der Verdrehwinkel oder die Neigung ist (bei kleinen Verformungen) gleich der ersten Ableitung der Biegelinie an dieser Stelle:

$$\varphi_A = w_{\mathrm{I}}'(0) = \frac{q_0 l^3}{EI}C_3 = \frac{5}{648}\frac{q_0 l^3}{EI} \tag{61}$$

Aufgabe 127

Auflagerreaktionen:

Freischnitt:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{A_h = 0} \tag{62}$$

$$\sum M_y^A = 0 \Rightarrow -Fa - F(l-a) + Dl = 0 \tag{63}$$

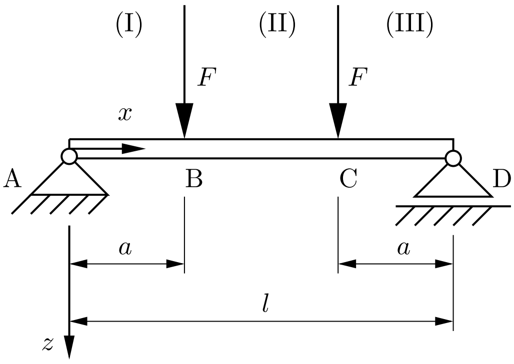
$$\Rightarrow \boxed{D = F} \tag{64}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -A_v + 2F - D = 0 \tag{65}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_v = F} \tag{66}$$

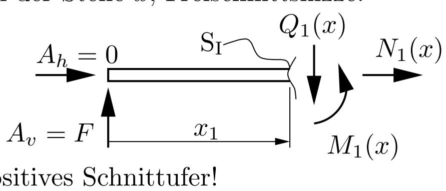
Biegemoment $M(x)$:

Es gibt drei Bereiche zu untersuchen (I, II und III)



Bereich I: $0 \leq x_1 < a$

Schnitt an der Stelle x, Freischnittsskizze:

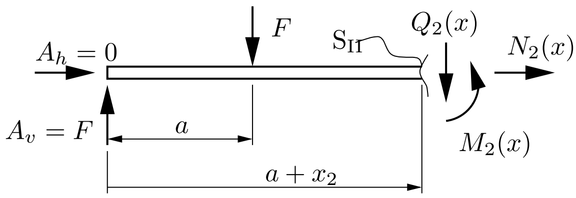


Bei S_I: positives Schnittufer!

$$\sum M_y^{(S_I)} = M_1(x) - Fx_1 = 0 \Rightarrow M_1(x) = Fx_1 \tag{67}$$

Bereich II: $0 \leq x_2 < l - 2a$

Freischnitt:



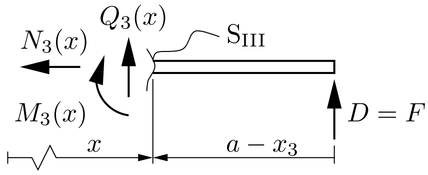
Bei S_{II}: positives Schnittufer!

$$\sum M_y^{(S_{II})} = M_2(x) - F(x_2 + a) + F\,(x_2) \overset{!}{=} 0 \tag{68}$$

$$\Rightarrow M_2(x) = Fa = \text{konst.} \tag{69}$$

Bereich III: $0 \leq x_3 \leq a$

Freischnitt:

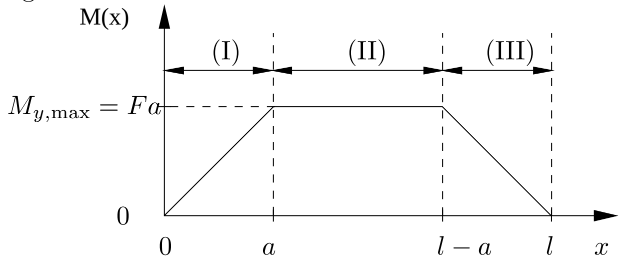


Bei S_{III}: negatives Schnittufer!

$$\sum M_y^{(S_{III})} = -M_3(x) + F\,(a - x_3) = 0 \tag{70}$$

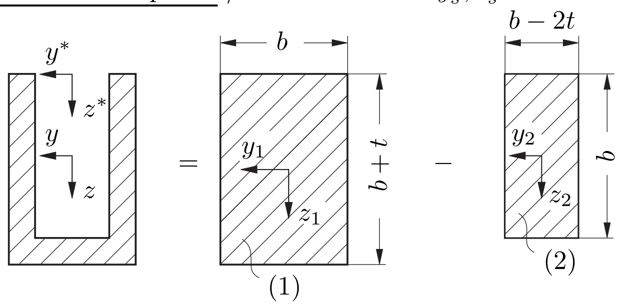
$$\Rightarrow M_3(x) = F\,(a - x_3) \tag{71}$$

Biegemomentenverlauf:



Das ist das maximale Biegemoment $M_{y,\max} = Fa$ tritt also im zweiten Bereich auf und ist dort konstant.

Flächenschwerpunkt / Bestimmen von y_s^*, z_s^* :



$y_s^* = 0$ (aufgrund der Symmetrie)

Tabelle für die Berechnung von z_S^*:

i	z_i^*	A_i	$z_i^* A_i$
1	$\frac{b+t}{2}$	$b(b+t)$	$\frac{b}{2}(b+t)^2$
2	$\frac{b}{2}$	$b(b-2t)$	$\frac{b^2}{2}(b-2t)$
$\sum$	—	$3bt$	$\frac{bt}{2}(4b+t)$

$$z_S^* = \frac{\sum_{i=1}^{2} A_i z_i^*}{\sum_{i=1}^{2} A_i} = \frac{\frac{bt}{2}(4b+t)}{3bt} \tag{72}$$

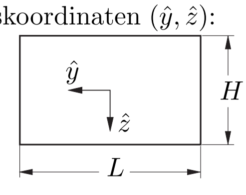
$$= \frac{4b+t}{6} \tag{73}$$

Flächenträgheitsmoment I_{yy}:

Mit dem Satz von Steiner:

$$I_{yy} = I_{y_1 y_1} + d_1^2 A_1 - I_{y_2 y_2} - d_2^2 A_2 \tag{74}$$

Für ein Rechteck der Höhe H und der Breite L gilt bzgl. der Schwerpunktskoordinaten $(\hat{y}, \hat{z})$:



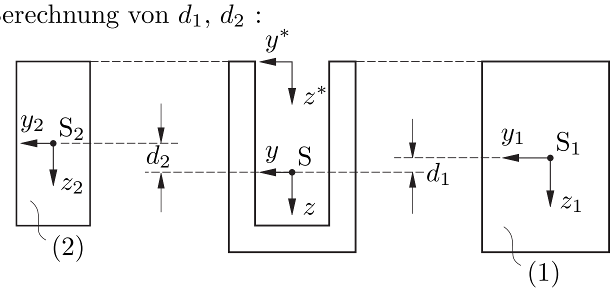
$$I_{\hat{y}\hat{y}} = \int_{(A)} \hat{z}^2 dA = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \hat{z}^2 d\hat{z} d\hat{y} = \frac{1}{12} H^3 L \tag{75}$$

Somit erhält man:

$$I_{y_1 y_1} = \frac{1}{12}\big(b+t\big)^3 b \quad \text{und} \tag{76}$$

$$I_{y_2 y_2} = \frac{1}{12} b^3 \big(b-2t\big) \quad . \tag{77}$$

Berechnung von d_1, d_2 :



Aus der Geometrie:

$$A_1 = b\,(b+t)\ , \quad A_2 = b\,(b-2t)\ , \tag{78}$$

$$d_1 = z_S^* - \frac{b+t}{2} \quad \text{und} \quad d_2 = z_S^* - \frac{b}{2} \tag{79}$$

Einsetzen von $I_{y_1 y_1}$, $I_{y_2 y_2}$, A_1, A_2, d_1 und d_2, in die Gleichung (74) liefert:

$$\begin{aligned} I_{yy} =& \frac{1}{12}(b+t)^3 b + \left(z_S^* - \frac{b+t}{2}\right)^2 b(b+t) + \dots \\ & - \frac{1}{12} b^3 (b-2t) - \left(z_S^* - \frac{b}{2}\right)^2 b(b-2t) \end{aligned} \tag{80}$$

$$= \frac{1}{3} b^3 t + \mathcal{O}(b^2 t^2) \quad . \tag{81}$$

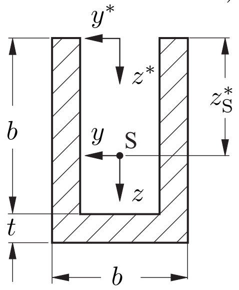
Gesucht sind die maximale Zug- und Druckspannung in dem Maschinenteil. Für die Normalspannung σ gilt für das Hauptträgheitsachsensystem (y, z):

$$\sigma(x,y,z) = \frac{M_y(x)}{I_{yy}} z - \underbrace{\frac{M_z(x)}{I_{zz}} y}_{=0,\,\text{ebener Lastfall}} + \underbrace{\frac{N(x)}{A}}_{=0,\, N_i(x)=0\,\forall i} \tag{82}$$

Daraus folgt, dass:

$$\sigma = \sigma_{\max}(z) \quad \text{bei} \quad M(x) = M(x)_{\max} \quad \text{und} \quad z = z_{\max} \tag{83}$$

(I_{yy} ist schon bekannt und konstant).



Somit ist $z_{\max}$:

$$z_{\max} = \begin{cases} b + t - z_S^* & \text{am unteren Rand des Profils: Zugspannung} \\ -z_S^* & \text{am oberen Rand des Profils: Druckspannung} \end{cases} \tag{84}$$

Daraus folgt, dass:

$$\sigma_{\max,\ \text{Zug}} = \frac{Fa}{I_{yy}}\big(b + t - z_S^*\big) \tag{85}$$

und

$$\sigma_{\max,\ \text{Druck}} = -\frac{Fa}{I_{yy}} z_S^* \quad . \tag{86}$$