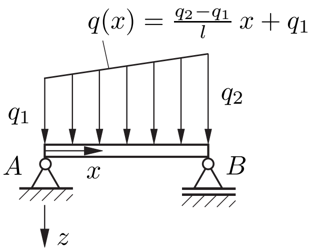
Tutorium

Aufgabe 104

(a)



Es handelt sich um ein *statisch bestimmtes* System, d.h. man kann alleine mit den Gleichgewichtsbedingungen oder den Schnittlastendifferentialgleichungen das Schnittmoment bestimmen.

$$M(x) = \frac{1}{6}(2q_1 + q_2)\,l \cdot x - \frac{q_2 - q_1}{6l}\,x^3 - q_1\,\frac{x^2}{2} \qquad (1)$$

Dieses ist proportional zur linearen Krümmung (Material-Strukturgleichung für den Biegebalken): $M = -EIw''$, w'' $\approx$ Krümmung. Durch anschließende zweimalige Integration erhält man die Biegelinie.

$$EIw(x) = \frac{q_2 - q_1}{120l}\,x^5 + q_1\,\frac{x^4}{24} - \frac{1}{36}(2q_1 + q_2)\,l \cdot x^3 + C_3 x + C_4 \qquad (2)$$

Die Konstanten C_3 und C_4 erhält man aus den geometrischen Randbedingungen, siehe dazu auch das klassische Schema weiter unten.

Die folgende Lösung beinhaltet die viermalige Integration der Biegeliniendifferentialgleichung, die auch bei *statisch unbestimmten* Systemen zur Anwendung kommt:

$$\begin{aligned}
q(x) &= EIw''''(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\,x + q_1 && (3)\\
-Q(x) &= EIw'''(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\,\frac{x^2}{2} + q_1 x + C_1 && (4)\\
-M(x) &= EIw''(x) = \frac{q_2 - q_1}{l}\,\frac{x^3}{6} + q_1\frac{x^2}{2} \\
&\qquad + C_1 x + C_2 && (5)\\
EIw'(x) &= \frac{q_2 - q_1}{l}\,\frac{x^4}{24} + q_1\frac{x^3}{6} \\
&\qquad + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 && (6)\\
EIw(x) &= \frac{q_2 - q_1}{l}\,\frac{x^5}{120} + q_1\frac{x^4}{24} \\
&\qquad + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 && (7)
\end{aligned}$$

Geometrische und physikalische Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
M(x=0) &= 0 && (8)\\
M(x=l) &= 0 && (9)\\
w(x=0) &= 0 && (10)\\
w(x=l) &= 0 && (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(8) \;\rightarrow\; C_2 = 0 && (12)\\
&(9) \;\rightarrow\; \left(q_2 - q_1\right)\frac{l^2}{6} + q_1\frac{l^2}{2} + C_1 l = 0 \\
&\qquad \rightarrow\; \underline{C_1 = -\frac{q_1 l}{3} - \frac{q_2 l}{6}} && (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(10) \;\rightarrow\; C_4 = 0 && (14)\\
&(11) \;\rightarrow\; \left(q_2 - q_1\right)\frac{l^4}{120} + q_1\frac{l^4}{24} - \frac{q_1 l}{3}\,\frac{l^3}{6} - \frac{q_2 l}{6}\,\frac{l^3}{6} \\
&\qquad\qquad + C_3 l = 0 && (15)\\
&\frac{q_2 l^3}{120} - \frac{q_1 l^3}{120} + \frac{q_1 l^3}{24} - \frac{q_1 l^3}{18} - \frac{q_2 l^3}{36} + C_3 = 0 && (16)\\
&\rightarrow\; \underline{C_3 = \frac{q_1 l^3}{45} + \frac{7 q_2 l^3}{360}} && (17)
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ Biegelinie:

$$\begin{aligned}
w(x) = \frac{l^4}{360\,EI}\Big[&3\left(q_2 - q_1\right)\left(\frac{x}{l}\right)^5 + 15q_1\left(\frac{x}{l}\right)^4 \\
&- \left(20q_1 + 10q_2\right)\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(8q_1 + 7q_2\right)\left(\frac{x}{l}\right)\Big] \qquad (18)
\end{aligned}$$

(b) Um die maximale Durchsenkung zu ermitteln, muß die Gleichung $w'(x_\mathrm{e}) = 0$ für $0 < x < \ell$ gelöst werden, z.B numerisch für konkrete Werte q_1 und q_2. Dann läßt sich das Extremum der Durchsenkung $w_\mathrm{max} = w(x_\mathrm{e})$ bestimmen. Die so gewonnenen lokalen Extrema müssen dann noch mit den Werten an den Intervallgrenzen verglichen werden, die hier jedoch Null sind.

Eine Näherung erhält man durch getrennte Betrachtung der beiden Fälle I und II. Die entsprechenden Stellen der Extremwerte liegen nahe beieinander:

$$\mathrm{I}: \quad w'_I(x_1) = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\ell \;\; \text{(da symmetrisch)} \qquad (19)$$

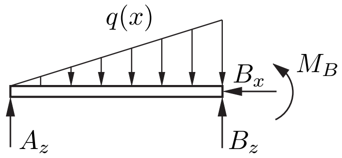
$$\begin{aligned}
\mathrm{II}: \quad w'_{II}\left(\frac{x_2}{\ell} = \alpha\right) = 0 &\rightarrow 15\alpha^4 - 30\alpha^2 + 7 = 0 && (20)\\
\alpha^2 = \beta &\rightarrow \beta^2 - 2\beta + 7/15 = 0 && (21)\\
x_2 &= \ell\sqrt{1 - \sqrt{8/15}} \approx 0{,}52\ell && (22)
\end{aligned}$$

Für die maximale Durchsenkung kann also folgende Näherung verwendet werden:

$$w_\mathrm{max} \approx w_I(x_1) + w_{II}(x_1) = \frac{5\ell^4}{768EI}(q_1 + q_2) \qquad (23)$$

Aufgabe 112

(a) statische Bestimmtheit?



Die vier unbekannten A_z, B_z, B_x, M_B der Lagerreaktionen können aus den drei Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene nicht bestimmt werden. Das System ist statisch unbestimmt.

(b) Integration der Biegeliniendifferentialgleichung:

$$\big(EI\,w''\big)''(x) = q(x) = \frac{q_0}{l}\,x \tag{24}$$

$$\big(EI\,w''\big)'(x) = -Q(x) = \frac{q_0 l}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + C_1 \tag{25}$$

$$EI\,w''(x) = -M(x) = \frac{q_0 l^2}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + C_1 l\left(\frac{x}{l}\right) + C_2 \tag{26}$$

$$EI\,w'(x) = \frac{q_0 l^3}{24}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{C_1 l^2}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + C_2 l\left(\frac{x}{l}\right) + C_3 \tag{27}$$

$$EI\,w\,(x) = \frac{q_0 l^4}{120}\left(\frac{x}{l}\right)^5 + \frac{C_1 l^3}{6}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{C_2 l^2}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + C_3 l\left(\frac{x}{l}\right) + C_4 \tag{28}$$

Geometrische und physikalische Randbedingungen:

$$w\,(x=0) = 0 \tag{29}$$

$$w\,(x=l) = 0 \tag{30}$$

$$M(x=0) = 0 \tag{31}$$

$$w'\,(x=l) = 0 \tag{32}$$

$$\text{Gl. (29) in (28)}: \quad C_4 = 0 \tag{33}$$

$$\text{Gl. (31) in (26)}: \quad C_2 = 0 \tag{34}$$

$$\text{Gl. (32) in (27)}: \quad C_3 = -q_0\frac{l^3}{24} - C_1\frac{l^2}{2} \tag{35}$$

$$\text{Gl. (30) in (28)}: \quad 0 = \frac{q_0 l^4}{120} + C_1\frac{l^3}{6} + C_3 l \tag{36}$$

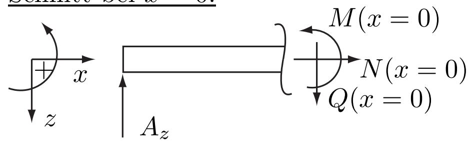
mit (35) ergibt sich:

$$C_1 = -\frac{q_0 l}{10} \tag{37}$$

$$C_3 = \frac{q_0 l^3}{120} \tag{38}$$

Auflagerreaktion in A:

Schnitt bei $x=0$:



$$\sum F_z = 0 = -A_z + Q(x=0)$$

$$A_z = Q(x=0) \tag{39}$$

aus Gl. (25):

$$Q(x) = -(EIw'')'(x) = -\frac{q_0 l}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - C_1$$

mit Gl. (37) und (39):

$$Q(x=0) = A_z = \frac{q_0 l}{10} \tag{40}$$

(c) Biegelinie bestimmen:
Gleichungen (33), (34), (37) und (38) in (28):

$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{120\,EI}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^5 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)\right] \tag{41}$$

(d) Verdrehwinkel φ_A in A:

$$w'(x) = \frac{q_0 l^3}{120\,EI}\left[5\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1\right] \tag{42}$$

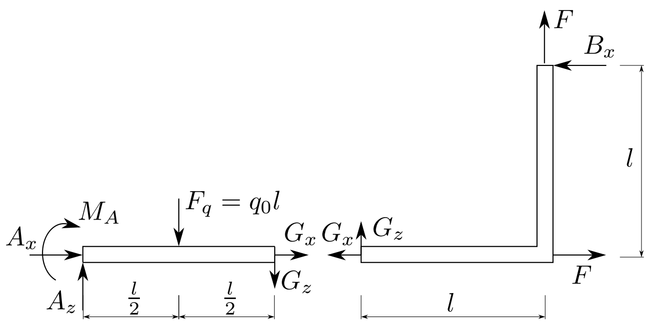
$$\varphi_A = w'(x=0) = \frac{q_0 l^3}{120\,EI} \tag{43}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 108

(a) Statische Bestimmtheit
Überprüfen der notwendigen Bedingung
$3n = r$
mit n Anzahl der Körper, r Anzahl der Reaktionen.
$3 \cdot 2 = 3 + 2 + 1 \Rightarrow 6 = 6 \quad \checkmark$
Die Balken sind verspannungsfrei eingebaut und sind nicht wackelig.

(b) Lagerreaktionen und Gelenkkräfte
Freischnitt:



Rechtes Teilsystem:

$$\sum F_z = -F - G_z = 0 \tag{44}$$
$$\Rightarrow G_z = -F \tag{45}$$

$$\sum M^{(G)} = F \cdot l + B_x \cdot l = 0 \tag{46}$$
$$\Rightarrow B_x = -F \tag{47}$$

$$\sum F_x = F - B_x - G_x = 0 \tag{48}$$
$$\Rightarrow G_x = 2F \tag{49}$$

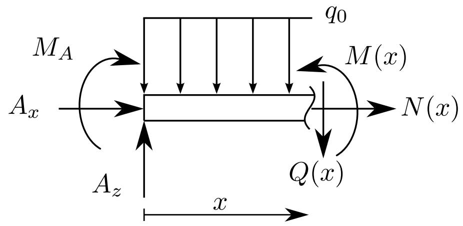
Linkes Teilsystem:

$$\sum F_x = A_x + G_x = 0 \tag{50}$$
$$\Rightarrow A_x = -2F \tag{51}$$

$$\sum F_z = -A_z + q_0 l + G_z = 0 \tag{52}$$
$$\Rightarrow A_z = -F + q_0 l \tag{53}$$

$$\sum M^{(A)} = -M_A - q_0 l \cdot \frac{l}{2} - G_z \cdot l = 0 \tag{54}$$
$$\Rightarrow M_A = Fl - \frac{1}{2} q_0 l^2 \tag{55}$$

(c) Biegemoment im Bereich $\overline{AG}$



$$\sum M^{(S)} = M(x) - M_A - A_z \cdot x + q_0 x \cdot \frac{x}{2} = 0 \tag{56}$$
$$\Rightarrow M(x) = M_A + A_z x - q_0 \frac{x^2}{2}$$
$$= -\frac{1}{2} q_0 x^2 + (q_0 l - F)\, x + Fl - \frac{1}{2} q_0 l^2 \tag{57}$$

(d) Maximales Biegemoment
Der Biegemomentenverlauf ist gegeben mit

$$M(x) = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + \frac{1}{2} q_0 l x \tag{58}$$

Finde lokale Extrema: $M'(x_{lm}) \stackrel{!}{=} 0$

$$M'(x_{lm}) = -q_0 x_{lm} + \frac{1}{2} q_0 l \stackrel{!}{=} 0 \tag{59}$$
$$\Rightarrow x_{lm} = \frac{l}{2} \tag{60}$$

Überprüfen der Randwerte liefert: $M(0) = 0$ und $M(l) = 0$.
Das maximale Biegemoment ist also

$$\underline{\underline{M_{\max} = M(x = x_{lm}) = \frac{1}{8} q_0 l^2}} \tag{61}$$

(e) Biegelinie im Bereich $\overline{AG}$

$$EIw''(x) = -M(x)$$
$$= \frac{1}{2} q_0 x^2 - -\frac{1}{2} q_0 l x \tag{62}$$
$$EIw'(x) = \frac{1}{6} q_0 x^3 - \frac{1}{4} q_0 l x^2 + C_1 \tag{63}$$
$$EIw(x) = \frac{1}{24} q_0 x^4 - \frac{1}{12} q_0 l x^3 + C_1 x + C_2 \tag{64}$$

Randbedingungen zum Lösen der Konstanten:

$$w(0) = 0 \qquad \Rightarrow C_2 = 0 \tag{65}$$
$$w'(0) = 0 \qquad \Rightarrow C_1 = 0 \tag{66}$$

Es folgt für die Biegelinie

$$\underline{\underline{w(x) = \frac{q_0 l^4}{12EI} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^4 - \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]}} \tag{67}$$

Aufgabe 113

(a) Nein, zwei einwertige Lager und ein zweiwertiges ergeben zusammen vier Auflagerreaktionskomponenten, die sich nicht allein aus den drei Gleichgewichtsbeziehungen bestimmen lassen, das System ist statisch unbestimmt. Deshalb lassen sich auch die Schnittlasten nicht allein aus den Gleichgewichtsbeziehungen bestimmen.

(b) Allgemeine Lösung der Biegeliniendifferentialgleichung:

Bereich I, $0 \leq x < \frac{2}{3}l$:

$$EIw_{\mathrm{I}}''''(x) = q_0 \tag{68}$$
$$EIw_{\mathrm{I}}'''(x) = q_0 l \left\{ \left[\frac{x}{l}\right] + C_1 \right\} \tag{69}$$
$$EIw_{\mathrm{I}}''(x) = q_0 l^2 \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_1\left[\frac{x}{l}\right] + C_2 \right\} \tag{70}$$
$$EIw_{\mathrm{I}}'(x) = q_0 l^3 \left\{ \frac{1}{6}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{C_1}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_2\left[\frac{x}{l}\right] + C_3 \right\} \tag{71}$$
$$EIw_{\mathrm{I}}(x) = q_0 l^4 \left\{ \frac{1}{24}\left[\frac{x}{l}\right]^4 + \frac{C_1}{6}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{C_2}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_3\left[\frac{x}{l}\right] + C_4 \right\} \tag{72}$$

Bereich II, $\frac{2}{3}l < x \leq l$:

$$EIw_{\mathrm{II}}''''(x) = q_0 \tag{73}$$
$$EIw_{\mathrm{II}}'''(x) = q_0 l \left\{ \left[\frac{x}{l}\right] + C_5 \right\} \tag{74}$$
$$EIw_{\mathrm{II}}''(x) = q_0 l^2 \left\{ \frac{1}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_5\left[\frac{x}{l}\right] + C_6 \right\} \tag{75}$$
$$EIw_{\mathrm{II}}'(x) = q_0 l^3 \left\{ \frac{1}{6}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{C_5}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_6\left[\frac{x}{l}\right] + C_7 \right\} \tag{76}$$
$$EIw_{\mathrm{II}}(x) = q_0 l^4 \left\{ \frac{1}{24}\left[\frac{x}{l}\right]^4 + \frac{C_5}{6}\left[\frac{x}{l}\right]^3 + \frac{C_6}{2}\left[\frac{x}{l}\right]^2 + C_7\left[\frac{x}{l}\right] + C_8 \right\} \tag{77}$$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$$w_{\mathrm{I}}(0) = 0 \tag{78}$$
$$w_{\mathrm{I}}(\frac{2}{3}l) = 0 \tag{79}$$
$$w_{\mathrm{II}}(\frac{2}{3}l) = 0 \tag{80}$$
$$w_{\mathrm{II}}(l) = 0 \tag{81}$$
$$w_{\mathrm{I}}'(\frac{2}{3}l) = w_{\mathrm{II}}'(\frac{2}{3}l) \tag{82}$$
$$M_{\mathrm{I}}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{\mathrm{I}}''(0) = 0 \tag{83}$$
$$M_{\mathrm{I}}(\frac{2}{3}l) = M_{\mathrm{II}}(\frac{2}{3}l) \quad \Rightarrow \quad w_{\mathrm{I}}''(\frac{2}{3}l) = w_{\mathrm{II}}''(\frac{2}{3}l) \tag{84}$$
$$M_{\mathrm{II}}(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{\mathrm{II}}''(l) = 0 \tag{85}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Einsetzen nach längerer Rechnung die folgenden Konstanten:

$$C_1 = -\frac{13}{48} \qquad C_2 = 0 \tag{86}$$
$$C_3 = \frac{5}{648} \qquad C_4 = 0 \tag{87}$$
$$C_5 = -\frac{23}{24} \qquad C_6 = \frac{11}{24} \tag{88}$$
$$C_7 = -\frac{47}{324} \qquad C_8 = \frac{11}{324} \tag{89}$$

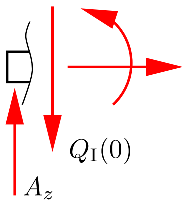
Für die Auflagerkräfte wird der Querkraftverlauf benötigt. Mit

$$-EIw''(x) = M(x)\,, \; M'(x) = Q(x) \tag{90}$$
$$-EIw'''(x) = Q(x) \tag{91}$$

ergibt sich

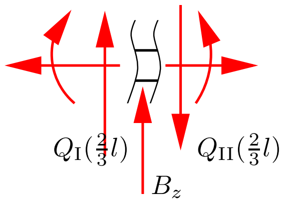
$$Q_{\mathrm{I}}(x) = q_0 l \left\{ \frac{13}{48} - \left[\frac{x}{l}\right] \right\} \tag{92}$$
$$Q_{\mathrm{II}}(x) = q_0 l \left\{ \frac{23}{24} - \left[\frac{x}{l}\right] \right\} \tag{93}$$

Freischnitt und Gleichgewicht am linken Ende:



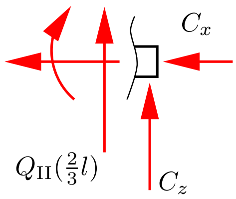
$$A_z = Q_{\mathrm{I}}(0) = \frac{13}{48} q_0 l \tag{94}$$

Freischnitt und Gleichgewicht am mittleren Lager:



$$B_z = Q_{\mathrm{II}}(\frac{2}{3}l) - Q_{\mathrm{I}}(\frac{2}{3}l) \tag{95}$$
$$= \frac{11}{16} q_0 l \tag{96}$$

Freischnitt und Gleichgewicht am rechten Lager:



$$C_z = -Q_{\mathrm{II}}(l) = \frac{1}{24} q_0 l \tag{97}$$

(Und $C_x = 0$ aus Gleichgewicht für den gesamten Balken.)