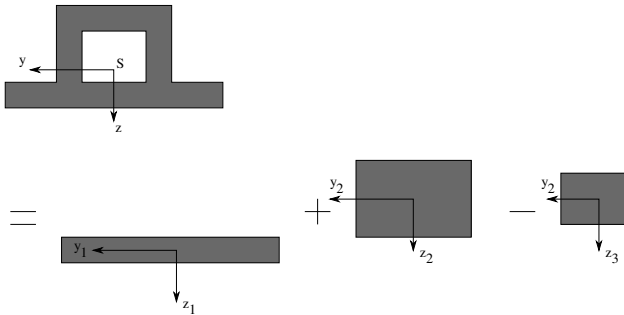


# Tutorium

## Aufgabe 120

### Bestimmen der Schwerpunktskoordinate



Berechnet wird der Abstand  $z_s$  des Schwerpunktskoordinatensystems  $y, z$  zum Koordinatensystem  $y_1, z_1$ .

### Tabellenverfahren

	$A_i$	$z_i$	$A_i z_i$
1	$10 \cdot b^2$	0	0
2	$18 \cdot b^2$	$-2b$	$-36 \cdot b^3$
3	$-8 \cdot b^2$	$-\frac{3}{2}b$	$12 \cdot b^3$
$\Sigma$	$20 \cdot b^2$		$-24 \cdot b^3$

$$z_s = -\frac{6}{5}b \quad (1)$$

### Bestimmen des FTM

Es gilt:

$$I_y = I_{1,y} + I_{2,y} - I_{3,y} \quad (2)$$

$$I_y = I_{1,y_1} + z_{s1}^2 A_1 + I_{2,y_2} + z_{s2}^2 A_2 - I_{3,y_3} - z_{s3}^2 A_3 \quad (3)$$

Dies kann mit einer erweiterten Tabelle leicht bestimmt werden.

	$A_i$	$z_{si} =  z_i - z_s $	$z_{si}^2$	$A_i z_{si}^2$	$I_{i,y_i}$
1	$10 \cdot b^2$	$\frac{6}{5}b$	$\frac{36}{25}b^2$	$\frac{360}{25}b^4$	$\frac{10}{12}b^4$
2	$18 \cdot b^2$	$\frac{4}{5}b$	$\frac{16}{25}b^2$	$\frac{288}{25}b^4$	$\frac{162}{12}b^4$
3	$-8 \cdot b^2$	$\frac{3}{10}b$	$\frac{9}{100}b^2$	$-\frac{18}{25}b^4$	$-\frac{32}{12}b^4$
$\Sigma$				$\frac{126}{5}b^4$	$\frac{35}{3}b^4$

$$I_y = \frac{553}{15}b^4 \quad (4)$$

## Aufgabe 122

$r_i$  und  $r_a$  sind Innen- und Außenradius des Rohrs,  $A$  ist der Flächeninhalt des Querschnitts.

$$I_{yy} = \int_A z^2 dA \stackrel{\text{Subst.}}{=} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_a} r^2 \sin^2 \varphi r dr d\varphi \quad (5)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_{r_i}^{r_a} \sin^2 \varphi d\varphi \quad (6)$$

$$= \frac{1}{4} (r_a^4 - r_i^4) \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \quad (7)$$

$$= \frac{1}{4} (r_a^4 - r_i^4) \left[ \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} \quad (8)$$

$$= \frac{\pi}{4} (r_a^4 - r_i^4) \quad (9)$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot [(51 \text{ cm})^4 - (49 \text{ cm})^4] = 78,57 \text{ dm}^4 \quad (10)$$

Zur Integration. Mit partieller Integration erhält man:

$$\int \sin^2 x dx = -\cos x \sin x + \int \cos^2 x dx \quad (11)$$

$$= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx \quad (12)$$

$$2 \int \sin^2 x dx = -\cos x \sin x + \int dx + \tilde{C} \quad (13)$$

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{x}{2} + C \quad (14)$$

... und mit Additionstheorem:

$$= -\frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{x}{2} + C \quad (15)$$

Oder gleich mit Additionstheorem:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx \quad (16)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + C \quad (17)$$

Wegen der Symmetrie ist das Flächenträgheitsmoment bezüglich jeder Achse, die durch den Mittelpunkt geht, unabhängig vom Winkel gleich  $I_{yy}$ . (z.B.  $I_{zz} = I_{yy}$ .)

Aus dem Satz von STEINER ergibt sich für die um  $e$  aus dem Flächenmittelpunkt verschobene Achse  $\eta$ :

$$I_{\eta\eta} = I_{yy} + Ae^2 = \frac{\pi}{4} (r_a^4 - r_i^4) + \pi (r_a^2 - r_i^2) e^2 \quad (18)$$

$$= 103,70 \text{ dm}^4 = 0,01 \text{ m}^4 \quad (19)$$

# Hausaufgaben

Schwerpunkt des Gesamtsystems liegt bei  $S = (t; \frac{5}{2}t)$ .  
 Berechnung von  $I_{yy}$ :

## Aufgabe 121

Bei beiden Systemen wird zur Bestimmung des Flächenträgheitssystems analog vorgegangen. Das jeweilige System wird in Teilsysteme (hier Rechtecke und Kreise) mit bekannten Eigenflächenträgheitsmomenten zerlegt. Von dem Gesamtsystem wird der Gesamtschwerpunkt berechnet. Dann werden in Tabellen die jeweiligen relevanten Werte eingetragen. Das sind:

- Fläche des Teilsystems  $A_i$
- Abstand der Gesamtschwerpunktsachse um die das FTM gebildet werden soll zu der lokalen Schwerpunktsachse des Teilsystems  $a_i$  in  $y$ -Richtung bzw.  $b_i$  in  $z$ -Richtung
- Steineranteil  $+a_i^2 A_i$ ,  $+b_i^2 A_i$  bzw.  $-a_i b_i A_i$
- Eigenflächenträgheitsmomente  $I_{yy}^*$ ,  $I_{zz}^*$  bzw.  $I_{yz}^*$  (FTM um lokale Schwerpunktsachsen; hier als bekannt für die einfachen Teilsysteme vorausgesetzt)

Teilkörper	$A_i$	$b_i = z_{Si} - z_S$	$b_i^2 A_i$	$I_{yy}^*$
I	$3t^2$	$t$	$3t^4$	$\frac{9}{4}t^4$
II	$3t^2$	$t$	$3t^4$	$\frac{1}{4}t^4$
$\Sigma$	/	-	$6t^4$	$\frac{5}{2}t^4$

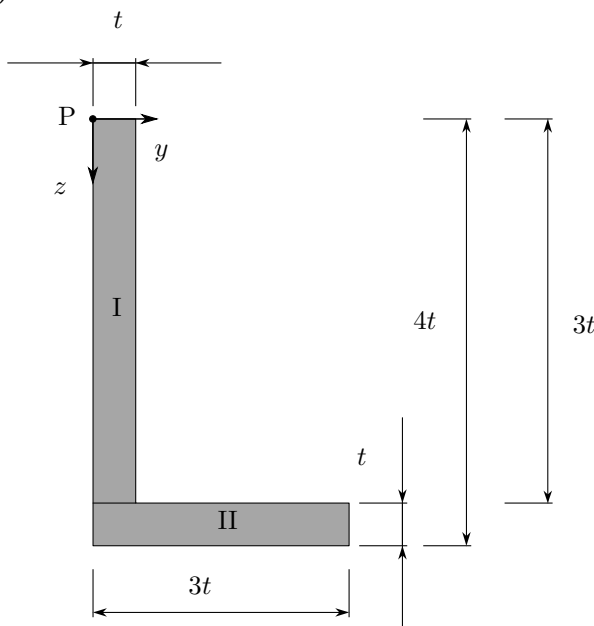
$$\Rightarrow I_{yy} = \sum b_i^2 A_i + \sum I_{yy}^* \quad (26)$$

$$= \underline{\underline{\frac{17}{2}t^4}} \quad (27)$$

Danach werden die Steineranteile und die Eigen-FTM addiert, um das Gesamt-FTM zu bestimmen.

Berechnung von  $I_{zz}$ :

(a)



Teilkörper	$A_i$	$a_i = y_{Si} - y_S$	$a_i^2 A_i$	$I_{zz}^*$
I	$3t^2$	$\frac{t}{2}$	$\frac{3}{4}t^4$	$\frac{1}{4}t^4$
II	$3t^2$	$\frac{t}{2}$	$\frac{3}{4}t^4$	$\frac{9}{4}t^4$
$\Sigma$	/	-	$\frac{3}{2}t^4$	$\frac{5}{2}t^4$

$$\Rightarrow I_{zz} = \sum a_i^2 A_i + \sum I_{zz}^* \quad (28)$$

$$= \underline{\underline{4t^4}} \quad (29)$$

Ermittlung des Schwerpunktes des Gesamtsystems:

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^2 y_{Si} A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} \quad (20)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}t \cdot 3t^2 + \frac{3}{2}t \cdot 3t^2}{3t^2 + 3t^2} \quad (21)$$

$$= t \quad (22)$$

$$z_S = \frac{\sum_{i=1}^2 z_{Si} A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} \quad (23)$$

$$= \frac{\frac{3}{2}t \cdot 3t^2 + \frac{7}{2}t \cdot 3t^2}{3t^2 + 3t^2} \quad (24)$$

$$= \frac{5}{2}t \quad (25)$$

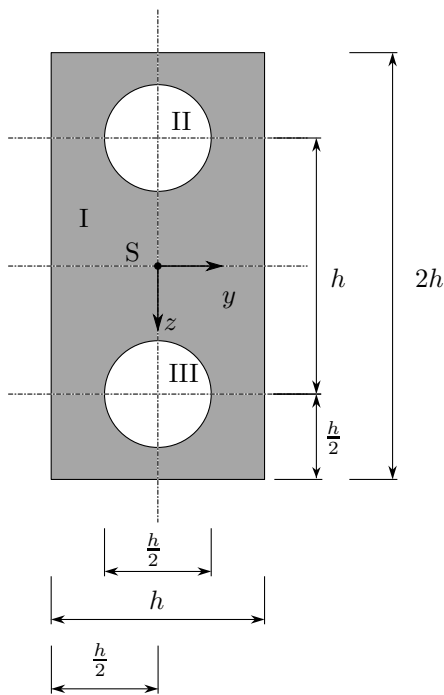
Berechnung von  $I_{yz}$  (Deviationsmoment):

Teilkörper	$A_i$	$a_i$	$b_i = z_{Si} - z_S$	$a_i b_i A_i$	$I_{yz}^*$
I	$3t^2$	$\frac{t}{2}$	$t$	$\frac{3}{2}t^4$	0
II	$3t^2$	$\frac{t}{2}$	$t$	$\frac{3}{2}t^4$	0
$\Sigma$	/	-	-	$3t^4$	0

$$\Rightarrow I_{yz} = - \sum a_i b_i A_i + \sum I_{yz}^* \quad (30)$$

$$= \underline{\underline{-3t^4}} \quad (31)$$

(b)



Teilkörper	$A_i$	$a_i = y_{Si} - y_S$	$b_i = z_{Si} - z_S$	$a_i b_i A_i$	$I_{yz}^*$
I	$2h^2$	0	0	0	0
II	$-\frac{\pi h^2}{16}$	0	$-\frac{h}{2}$	0	0
III	$-\frac{\pi h^2}{16}$	0	$\frac{h}{2}$	0	0
I-II-III	/	0	-	0	0

$$\Rightarrow I_{yz} = \sum -a_i b_i A_i + \sum I_{yz}^* = \underline{0} \quad (37)$$

Merke: Das Deviationsmoment bezüglich der Symmetrieachsen verschwindet immer.

Hier werden von dem kompletten Rechteck (I) die beiden Flächenträgheitsmomente der Kreise (II) und (III) abgezogen:

$$I_{\text{ges}} = I_I - I_{II} - I_{III} \quad (32)$$

Berechnung von  $I_{yy}$ :

Teilkörper	$A_i$	$b_i = z_{Si} - z_S$	$b_i^2 A_i$	$I_{yy}^*$
I	$2h^2$	0	0	$\frac{2}{3}h^4$
II	$-\frac{\pi h^2}{16}$	$-\frac{h}{2}$	$-\frac{\pi h^4}{64}$	$-\frac{\pi h^4}{1024}$
III	$-\frac{\pi h^2}{16}$	$\frac{h}{2}$	$-\frac{\pi h^4}{64}$	$-\frac{\pi h^4}{1024}$
I-II-III	/	-	$-\frac{\pi h^4}{32}$	$\left(\frac{1024-3\pi}{1536}\right) h^4$

$$\Rightarrow I_{yy} = \sum b_i^2 A_i + \sum I_{yy}^* \quad (33)$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{1024-51\pi}{1536}\right) h^4}} \quad (34)$$

Berechnung von  $I_{zz}$ :

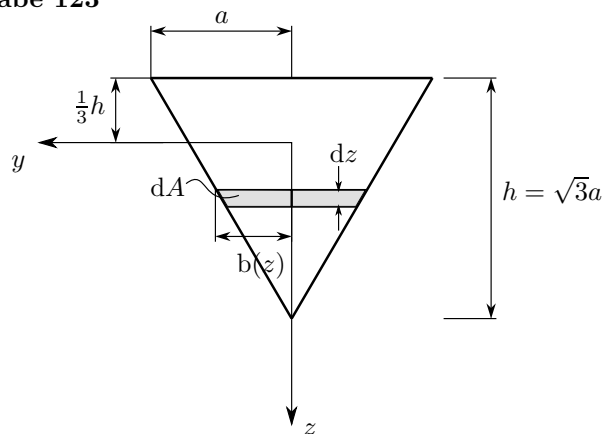
Teilkörper	$A_i$	$a_i = y_{Si} - y_S$	$a_i^2 A_i$	$I_{zz}^*$
I	$2h^2$	0	0	$\frac{1}{6}h^4$
II	$-\frac{\pi h^2}{16}$	0	0	$\frac{-\pi h^4}{1024}$
III	$-\frac{\pi h^2}{16}$	0	0	$\frac{-\pi h^4}{1024}$
I-II-III	/	-	0	$\left(\frac{256-3\pi}{1536}\right) h^4$

$$\Rightarrow I_{zz} = \sum a_i^2 A_i + \sum I_{zz}^* \quad (35)$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{256-3\pi}{1536}\right) h^4}} \quad (36)$$

Berechnung von  $I_{yz}$ :

## Aufgabe 123



$$I_y = \int_{-\frac{1}{3}h}^{\frac{2}{3}h} z^2 dA \quad (38)$$

$$= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} z^2 2b(z) dz \quad (39)$$

$b(z)$  ist als Geradengleichung der Dreiecksseite aufzufassen:

$$b(z) = -\frac{1}{\sqrt{3}}z + \frac{2}{3}a. \quad (40)$$

Damit ergibt sich für  $I_y$ :

$$I_y = 2 \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} z^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}z + \frac{2}{3}a\right) dz \quad (41)$$

$$= 2 \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}z^3 + \frac{2}{3}az^2\right) dz \quad (42)$$

$$= 2 \left[ -\frac{1}{4\sqrt{3}}z^4 + \frac{2}{9}az^3 \right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}a}^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} \quad (43)$$

$$= 2 \left[ -\frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{16}{9}a^4 + \frac{2}{9} \frac{8}{3\sqrt{3}}a^4 + \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{1}{9}a^4 + \frac{2}{9} \frac{1}{3\sqrt{3}}a^4 \right] \quad (44)$$

$$= 2a^4 \left[ -\frac{15}{4\sqrt{3}9} + \frac{18}{3\sqrt{3}9} \right] = \left[ -\frac{5}{6} + \frac{4}{3} \right] \frac{a^4}{\sqrt{3}} \quad (45)$$

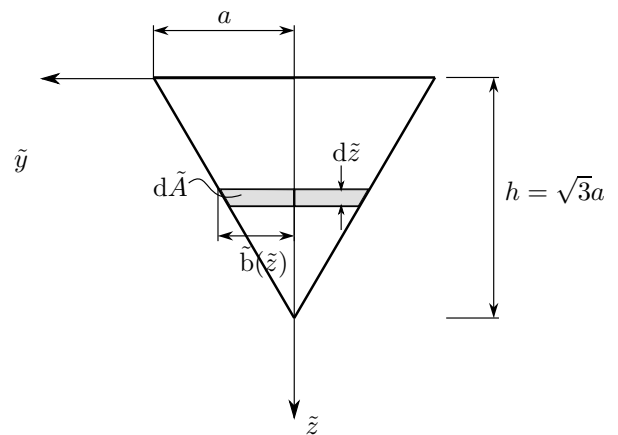
$$\underline{\underline{I_y = \frac{1}{6}\sqrt{3}a^4}} \quad (46)$$

Um die Integration zu vereinfachen kann die Aufgabe auch mit Hilfe des Steinerschen Satzes gelöst werden. Es gilt:

$$I_{\tilde{y}} = I_y + \tilde{z}_s^2 A \quad (47)$$

$$\Rightarrow I_y = I_{\tilde{y}} - \tilde{z}_s^2 A \quad (48)$$

wobei  $\tilde{z}_s = \frac{1}{\sqrt{3}}a$  ist und  $A = \sqrt{3}a^2$  ist.



$\tilde{b}(\tilde{z}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z} + a$  und für  $d\tilde{A}$  gilt  $d\tilde{A} = 2\tilde{b}(\tilde{z}) d\tilde{z}$ . Damit ergibt sich für  $I_{\tilde{y}}$ :

$$I_{\tilde{y}} = \int_0^{\sqrt{3}a} \tilde{z}^2 2\tilde{b}(\tilde{z}) d\tilde{z} \quad (49)$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{3}a} \tilde{z}^2 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z} + a\right) d\tilde{z} \quad (50)$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{3}a} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{z}^3 + a\tilde{z}^2\right) d\tilde{z} \quad (51)$$

$$= 2 \left[ -\frac{1}{4\sqrt{3}}\tilde{z}^4 + \frac{1}{3}a\tilde{z}^3 \right]_0^{\sqrt{3}a} \quad (52)$$

$$= -\frac{1}{2}3\sqrt{3}a^4 + \frac{4\sqrt{3}}{2}a^4 \quad (53)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}a^4. \quad (54)$$

Schließlich ergibt sich für  $I_y$ :

$$I_y = \frac{1}{2}\sqrt{3}a^4 - \frac{1}{3}\sqrt{3}a^4 \quad (55)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{6}\sqrt{3}a^4}} \quad (56)$$