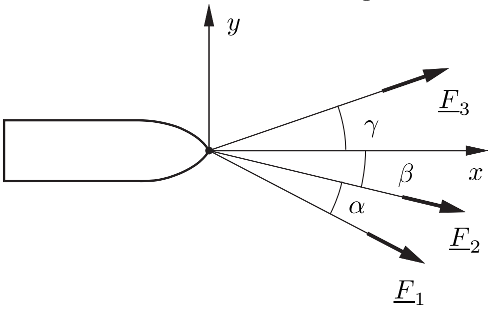
Tutorium

Aufgabe 3

Der Vektor der resultierenden Zugkraft $\underline{F}_{res}$ ist gleich der Summe der Vektoren der einzelnen Zugkräfte.



$$\underline{F}_{res} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 \tag{1}$$

Die x- und y-Komponenten der Einzelkräfte berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} F_{1,x} &= F\cos(\alpha+\beta) & F_{1,y} &= -F\sin(\alpha+\beta)\\ F_{2,x} &= F\cos\beta & F_{2,y} &= -F\sin\beta\\ F_{3,x} &= F\cos\gamma & F_{3,y} &= F\sin\gamma \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gleichung (1):

$$\begin{aligned} \underline{F}_{res} &= \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3\\ &= (F_{1,x}+F_{2,x}+F_{3,x})\underline{e}_x + (F_{1,y}+F_{2,y}+F_{3,y})\underline{e}_y\\ &= F\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos\beta+\cos\gamma\big)\underline{e}_x\\ &\quad + F\big(-\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta+\sin\gamma\big)\underline{e}_y\\ &\approx 56{,}616\text{kN}\ \underline{e}_x - 5{,}085\text{kN}\ \underline{e}_y \end{aligned}$$

Die resultierende Kraft aller drei Schlepper ist der Betrag dieses Vektors:

$$\begin{aligned} F_{res} = |\underline{F}_{res}| &= \sqrt{F_{res,x}^2 + F_{res,y}^2}\\ &\approx 56{,}844\text{kN} \end{aligned}$$

Der Winkel δ, den die resultierende Kraft F_{res} mit der x-Achse einschließt ergibt sich aus

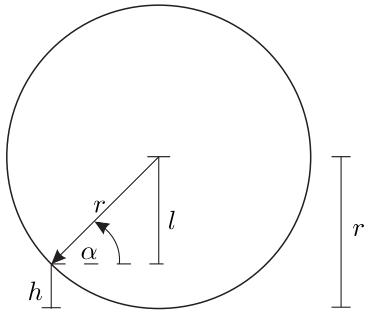
$$\tan\delta = \frac{F_{res,y}}{F_{res,x}}$$

$$\delta = \arctan(\frac{F_{res,y}}{F_{res,x}}) \tag{2}$$

$$\approx -5{,}1^\circ \tag{3}$$

Aufgabe 10

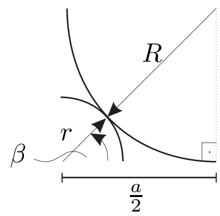
(a) Winkel α bestimmen:



$$l = r - h \tag{4}$$

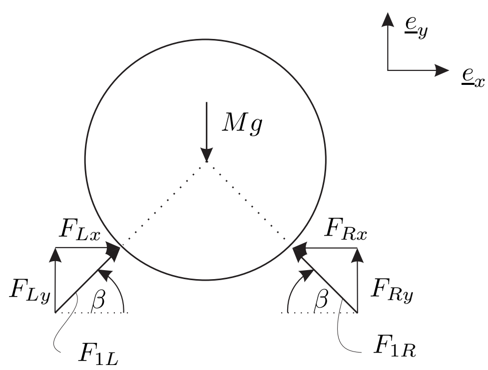
$$\sin\alpha = \frac{l}{r} = \frac{r-h}{r} \tag{5}$$

Winkel β bestimmen:



$$\cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{r+R} \tag{6}$$

(b) Bestimmen der Kontaktkräfte:
Kontakte sind glatt $\Rightarrow$ Kräfte werden nur in Normalenrichtung übertragen.
Freischnitt der oberen Walze:



$$\vec{F}_{1L} = \cos\beta F_{1L}\underline{e}_x + \sin\beta F_{1L}\underline{e}_y \tag{7}$$

Analog dazu berechnet sich $\vec{F}_{1R}$. Kräftegleichgewicht:

$$\sum F_x = F_{1L}\cos\beta - F_{1R}\cos\beta \stackrel{!}{=} 0 \tag{8}$$

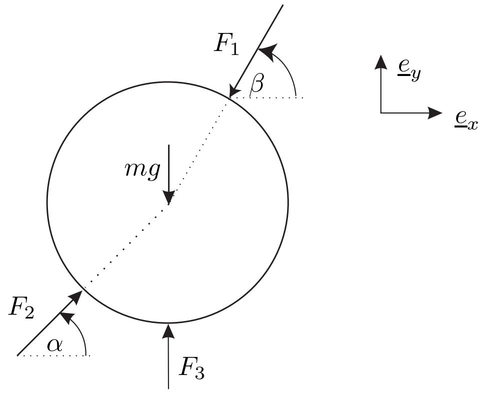
$$\Rightarrow \quad F_{1L} = F_{1R} =: F_1 \tag{9}$$

Dieses ist auch aus der Symmetrie des Systems ersichtlich.

$$\sum F_y = -Mg + 2F_1\sin\beta \stackrel{!}{=} 0 \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad F_1 = \frac{Mg}{2\sin\beta} \tag{11}$$

Freischnitt der unteren linken Walze:



Kräftegleichgewicht:

$$\sum F_x = F_2 \cos\alpha - F_1 \cos\beta \overset{!}{=} 0 \tag{12}$$

$$\Rightarrow \quad F_2 = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} F_1 \overset{11}{=} \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \frac{Mg}{2\sin\beta} \tag{13}$$

$$\sum F_y = -mg + F_3 - F_1 \sin\beta + F_2 \sin\alpha \overset{!}{=} 0 \tag{14}$$

$$\Rightarrow \quad F_3 = mg + \left[\sin\beta - \sin\alpha \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right] F_1$$

$$= mg + \frac{Mg}{2}\left[1 - \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right] \tag{15}$$

Analog dazu lassen sich die Kräfte der rechten Walze berechnen. (Symmetrie!)

Hausaufgaben

Aufgabe 2

ges.: $\left|\vec{F}_{res}\right|$ und Richtung rechnerisch und zeichnerisch

<u>rechnerisch:</u>
Darstellung der Kräfte F_1, F_2 als Vektoren:

$$\vec{F}_1 = F_1 \cos\alpha \underline{e}_x + F_1 \sin\alpha \underline{e}_y = \begin{pmatrix} F_1 \cos\alpha \\ F_1 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \cos\beta \underline{e}_x + F_2 \sin\beta \underline{e}_y = \begin{pmatrix} F_2 \cos\alpha \\ F_2 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Berechnung der Resultierenden aus vektorieller Summe:

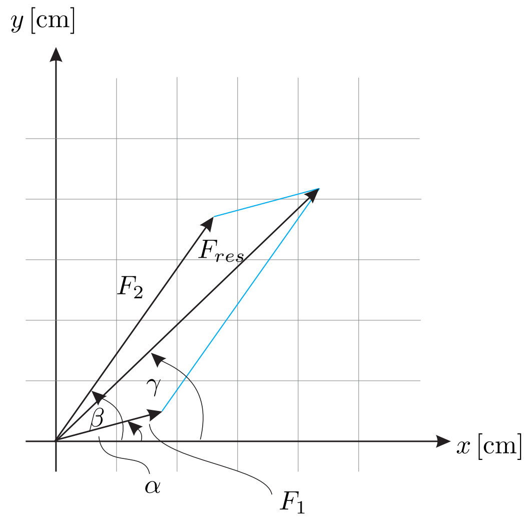
$$\begin{aligned} \vec{F}_{res} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ &= (F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta)\, \underline{e}_x + (F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta)\, \underline{e}_y \\ &= \begin{pmatrix} F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta \\ F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 3,23 \\ 2,596 \end{pmatrix} \mathrm{kN} = 3,23\mathrm{kN}\underline{e}_x + 2,596\mathrm{kN}\underline{e}_y \\ &= \begin{pmatrix} F_{res,x} \\ F_{res,y} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Betrag: $\left|\vec{F}_{res}\right| = \sqrt{F_{res,x}^2 + F_{res,y}^2} \approx 4,144\mathrm{kN}$
Richtung:

$$\tan\gamma = \frac{F_{res,y}}{F_{res,x}}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \arctan\left(\frac{F_{res,y}}{F_{res,x}}\right) \approx 38,79^\circ$$

<u>zeichnerisch:</u>
Zeichnung mit Maßstab $\frac{1\mathrm{kN}}{1\mathrm{cm}}$



Ablesen liefert:

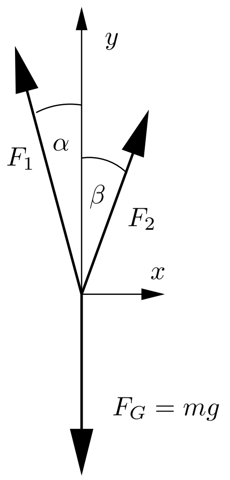
$$F_{res} \widehat{=} 4,14\mathrm{cm} \quad \Rightarrow \quad F_{res} = 4,14\mathrm{kN}$$

$$\gamma \approx 39^\circ$$

Aufgabe 4

(a) Da die Kiste in Ruhe ist, muss Kräftegleichgewicht herrschen, d.h. die (vektorielle) Summe aller Kräfte muss Null sein.

$$\begin{aligned}\underline{0} &= -F_1 \sin\alpha \underline{e}_x + F_1 \cos\alpha \underline{e}_y \\ &\quad + F_2 \sin\beta \underline{e}_x + F_2 \cos\beta \underline{e}_y - F_G \underline{e}_y\end{aligned}$$



Für den Gleichgewichtszustand müssen also die beiden skalaren Gleichungen

$$0 = -F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta \tag{16}$$
$$0 = F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta - F_G \tag{17}$$

gelten. Anschaulich kann man auch so argumentieren: die resultierende Kraft F_{res} der beiden Kräfte F_1 und F_2 muss genau senkrecht wirken, damit die Kiste ruhig hängt. Deshalb müssen sich die Kraftkomponenten in x-Richtung genau aufheben.

Man erhält

$$F_1 = F_2 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \approx 6{,}607\,\text{kN} \quad . \tag{18}$$

(Zur Information: Der Betrag der resultierenden Kraft F_{res} ist (in diesem speziellen Fall) gleich der Summe der y-Komponenten $F_{1,y}$ und $F_{2,y}$ der Kräfte F_1 und F_2:

$$\begin{aligned}F_{\text{res}} &= \sqrt{F_{\text{res},x}^2 + F_{\text{res},y}^2} \\ &= F_{1,y} + F_{2,y} \\ &= F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta = F_2 \left(\sin\beta \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos\beta\right) \\ &= F_2(\sin\beta \cot\alpha + \cos\beta) \approx 11{,}081\,\text{kN})\end{aligned}$$

(b) Aus (17) folgt für die Gewichtskraft

$$F_G = F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta \quad .$$

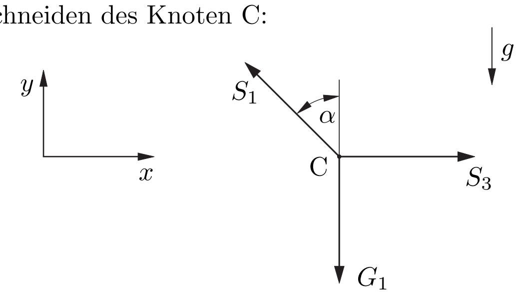
Daraus ergibt sich die Masse zu

$$m = \frac{F_G}{g} \approx 1130\,\text{kg} \quad .$$

Aufgabe 8

<u>Bestimmung der Kräfte in den Stäben</u>

Freischneiden des Knoten C:



Kräftegleichgewicht in x-Richtung

$$\sum F_x = 0 = -S_1 \sin\alpha + S_3 \tag{19}$$

Kräftegleichgewicht in y-Richtung

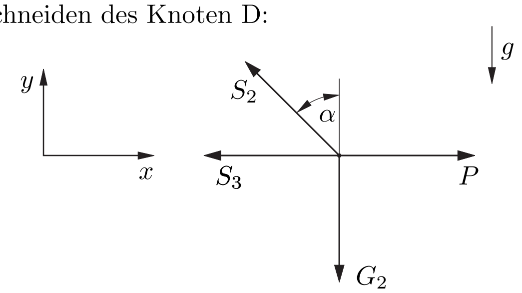
$$\sum F_y = 0 = S_1 \cos\alpha - G_1 \tag{20}$$

Auflösen nach S_1 und S_3

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{G_1}{\cos\alpha} = \frac{G}{\cos\alpha} = \sqrt{2}G \\ S_1 &\approx 141\,\text{N} \\ S_3 &= S_1 \sin\alpha = G \tan\alpha = G \\ S_3 &= 100\,\text{N}\end{aligned}$$

S_1 und S_3 sind positiv, d.h. die Kräfte wirken in die eingezeichnete Richtung, demnach sind die Stäbe 1 und 3 auf Zug belastet.

Freischneiden des Knoten D:



<u>Kräftegleichgewicht (in vektorieller Form)</u>

$$\sum \underline{F} = \underline{0} = \underline{S}_2 + \underline{S}_3 + \underline{G}_2 + \underline{P} \tag{21}$$

Darstellung der Kräfte in der Basis $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$.

$$\underline{S}_2 = \begin{pmatrix} -S_2 \sin\alpha \\ S_2 \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \underline{S}_3 = \begin{pmatrix} -S_3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\underline{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2G \end{pmatrix} \qquad \underline{P} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\sum \underline{F} = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -S_2 \sin\alpha \\ S_2 \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -S_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und den gegebenen Werten:

$$\begin{aligned}S_2 &= 2\sqrt{2}G \approx 282\,\text{N} \\ P &= 3G = 300\,\text{N}\end{aligned}$$

Auch der Stab 2 ist auf Zug belastet.

Hinweis: Beim Knoten C wurden direkt die skalaren Gleichungen angeschrieben. In der Ebene sind dies zwei Gleichungen je Knoten. Beim Knoten D hingegen wurde das Kräftegleichgewicht vektoriell notiert.

Viele empfinden die „skalare Schreibweise“ bei ebenen Problemen als vorteilhaft. Bei räumlichen Problemen kommt man jedoch um die vektorielle Schreibweise kaum herum.