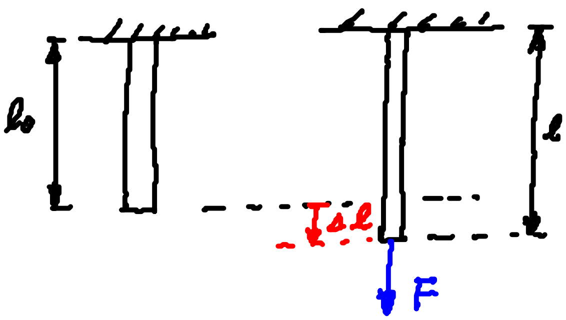
8. Übung (Halbzeit!)

2. Teil: Elementare Festigkeitslehre

Wichtige Infos:
- Am Montag, den 2. Januar 2017 ist keine Uni!
  → anderes Tutorium suchen!
- Evaluation (5 Min. im Netz)

Thema: Spannung, Dehnung bei homogenen Stäben

Vorbetrachtungen: Einachsiger Zugversuch



l_0 : Ausgangslänge (undeformiert)

l : Länge in der Momentankonfiguration (deformiert)

Δl : Längenänderung des Stabes

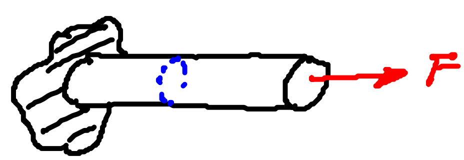
$$\boxed{\Delta l := l - l_0} \quad (1)$$

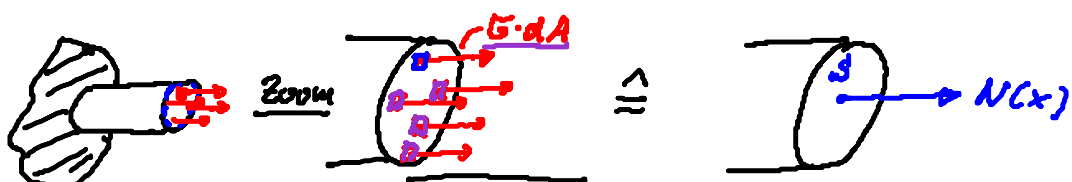
1. Dehnung:

$$\boxed{\varepsilon := \frac{\Delta l}{l_0}} \quad (2)$$

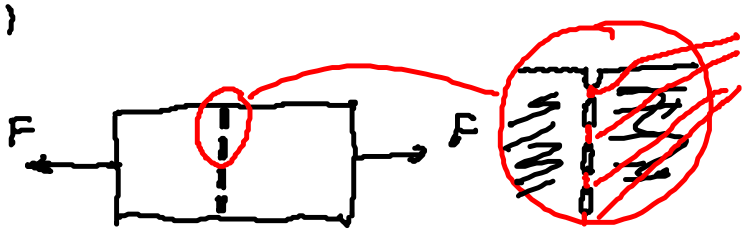
Maßeinheit: $[\varepsilon] = \frac{[\Delta l]}{[l_0]} = \frac{m}{m} = \underline{\underline{1}}$

2. Spannung:





$$N(x) = \int_{(A)} \sigma(x)\, dA \approx \sigma \cdot A \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{N}{A}} \quad (3)$$



$A \downarrow \Rightarrow \sigma \uparrow \Rightarrow$ Klopapier reißt!

3. Materialgesetz: Spannungs-Dehnungsdiagramm

$\sigma \sim \varepsilon \implies \boxed{\sigma = E\,\varepsilon}$ (4)

Hookesches Gesetz!

E: Elastizitätsmodul

Mehrzahl: Elastizitätsmoduln

$$[\sigma] = \frac{[N]}{[A]} = \frac{N}{m^2} \qquad [E] = \frac{[\sigma]}{[\varepsilon]} = \frac{\frac{N}{m^2}}{1} = \underline{\underline{\frac{N}{m^2}}}$$

Stahl: $E \approx 210\ GPa = 210 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$

Modifiziertes Materialgesetz für einen Stab:

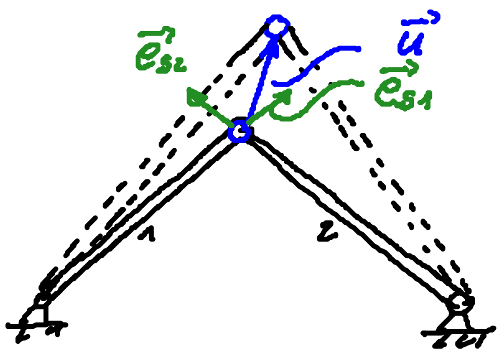
(1) – (4) ineinander einsetzen $\implies$

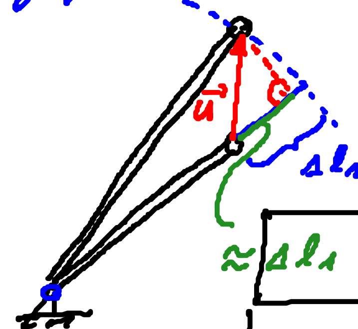
$$\left.\begin{array}{l} \sigma = \frac{N}{A} \\ \sigma = E \cdot \varepsilon = E\,\frac{\Delta l}{l} \end{array}\right\} \frac{N}{A} = E\,\frac{\Delta l}{l} \quad /\!\!/ \cdot A$$

$$\boxed{N = EA\,\frac{\Delta l}{l}} \quad (5)$$

4. Verschiebungskinematik – Projektionsmethode

Wie groß sind die Längenänderungen der Stäbe?





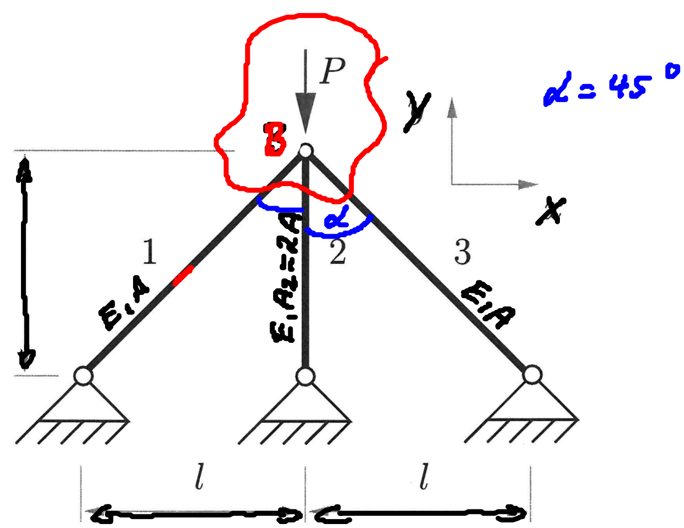
$$\approx \boxed{\Delta l_1 \approx \vec{u} \cdot \vec{e}_{S1}} \quad (6)$$

$$\boxed{\Delta l_2 \approx \vec{u} \cdot \vec{e}_{S2}}$$

---

83. Das gezeigte ebene, symmetrische Dreibein besteht aus drei elastischen Stäben. Alle drei Stäbe haben den E-Modul E. Die Stäbe 1 und 3 haben die Querschnittsfläche A, Stab 2 hat die Querschnittsfläche $2A$.

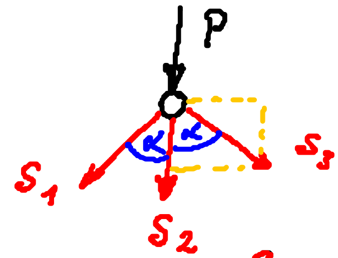
Das Dreibein wird im oberen Gelenkpunkt, in dem alle Stäbe gelenkig verbunden sind, durch eine Kraft P belastet. Knicken der Stäbe sei ausgeschlossen. Die Verformungen sind sehr klein und rein elastisch.



(a) Berechnen Sie die Stabkräfte S_1, S_2 und S_3.

(a) Freischnitt des Knotens B und GGB:

(b) Wie groß ist die Durchsenkung w des Punktes B?



Geg.: P, E, A, l

GGB: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow S_3 \frac{1}{\sqrt{2}} - S_1 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \underline{S_1 = S_3}$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow -P - \frac{1}{\sqrt{2}} S_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} S_3 - S_2 = 0$ (2)

Problem! 3 Unbekannte aber nur 2 Glgn! System ist <u>einfach</u> statisch unbestimmt! $\Rightarrow$ Wir brauchen noch eine Glg!

<u>Materialgesetz</u>: $S_i = \frac{E_i \cdot A_i}{l_i} \Delta l_i \qquad i = 1, 2, 3$

$S_1 = \frac{E \cdot A}{\sqrt{2} l} \Delta l_1$ (3) $\qquad S_2 = \frac{E \cdot 2A}{l} \Delta l_2$ (4) $\qquad S_3 = \frac{E \cdot A}{\sqrt{2} l} \Delta l_3$ (5)

Super! 3 zusätzliche Glgn! <u>Nicht super!</u> 3 zusätzl. Unbekannte $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$

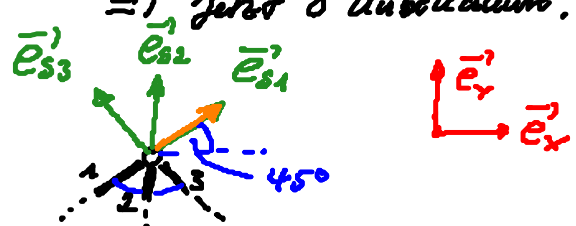
<u>Geometrische Verträglichkeitsbedingung</u>: Wir führen ein:

$\vec{u}_B = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$ (6)

$\Rightarrow$ Jetzt 8 Unbekannte!

Skalarprodukt!

$$\Delta l_1 = \vec{u}_B \cdot \vec{e}_{S1} = (u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \underline{\underline{u_x \frac{1}{\sqrt{2}} + u_y \frac{1}{\sqrt{2}}}} \quad (7)$$



Stabeinheitsvektoren

$\vec{e}_{S1} = 1 \cdot \cos 45° \, \vec{e}_x + 1 \cdot \sin 45° \, \vec{e}_y = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \vec{e}_y)}}$

$\vec{e}_{S2} = \underline{\underline{\vec{e}_y}}$

$\vec{e}_{S3} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{e}_x + \vec{e}_y)}}$

$$\Delta l_2 = \vec{u}_B \cdot \vec{e}_{S2} = (u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y) \cdot (\vec{e}_y) = \underline{\underline{u_y}} \quad (8)$$

$$\Delta l_3 = \vec{u}_B \cdot \vec{e}_{S3} = (u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \underline{\underline{-\frac{1}{\sqrt{2}} u_x + \frac{1}{\sqrt{2}} u_y}} \quad (9)$$

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1 \; ; \; \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$

8 Glgn für 8 Unbekannte! Perfekt!

<u>Lsg. des Gleichungssystems</u>:

(7), (8), (9) einsetzen in (3), (4), (5)

$$S_1 = \frac{EA}{\sqrt{2}\,l}\,\overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(u_x + u_y)}^{\Delta l_1} \qquad (10)$$

$$S_2 = \frac{E\cdot 2A}{l}\,u_y \qquad (11)$$

$$S_3 = \frac{EA}{\sqrt{2}\,l}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(-u_x + u_y) \qquad (12)$$

$+$

$$S_1 + S_3 = \frac{EA}{2l}\left[u_y + u_x\right]$$

$$S_1 + S_3 = \frac{EA}{l}\,u_y \qquad (13)$$

mit $\boxed{u_y = \frac{S_2\cdot l}{2E\cdot A}}$ aus (11) (14)

(14) in (13) $\Rightarrow$ $S_1 + S_3 = \frac{\cancel{EA}}{\cancel{l}}\,\frac{S_2\cdot \cancel{l}}{2\cancel{EA}} = \frac{1}{2}S_2 \qquad (15)$

Glgn (1), (2) und (15) sind 3 Glgn für 3 Unbekannte S_1, S_2, S_3

(2): $-P - \frac{1}{\sqrt{2}}S_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}S_1 - S_2 = 0$ $\qquad$ (1): $S_1 = S_3$

$$-P - \frac{1}{\sqrt{2}}\,2S_3 - S_2 = 0 \qquad (16)$$

aus (15) $\Rightarrow$ $S_2 = 2(S_1 + S_3) = 2\cdot(S_3 + S_3) = 4S_3$

$\overset{(16)}{\Rightarrow}$ $-P - \frac{\overset{\sqrt{2}}{1}}{\cancel{\sqrt{2}}_{1}}\cdot\cancel{2}S_3 - 4S_3 = 0 \iff (\sqrt{2}+4)\cdot S_3 = -P$

$$S_3 = -\frac{P}{\sqrt{2}+4} = S_1 \qquad (17)$$

$$\Rightarrow S_2 = -\frac{4P}{\sqrt{2}+4}$$

(b) Verschiebung des Punktes 3:

$$u_y = \frac{S_2\cdot l}{2EA} = -\frac{\overset{2}{\cancel{4}}P}{\sqrt{2}+4}\,\frac{l}{\underset{1}{\cancel{2}}EA} = -\frac{2P\cdot l}{EA(\sqrt{2}+4)}$$

(10) $-$ (12) $\Rightarrow$ $\underbrace{S_1 - S_3}_{=0} = \frac{EA}{l}\,u_x$

$$0 = \frac{EA}{l}\cdot u_x \Rightarrow u_x = 0$$