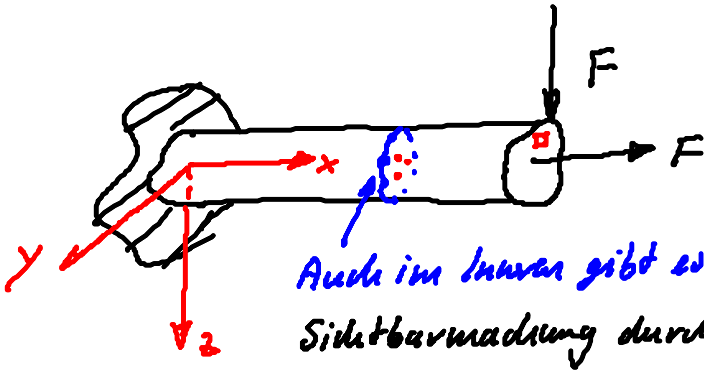
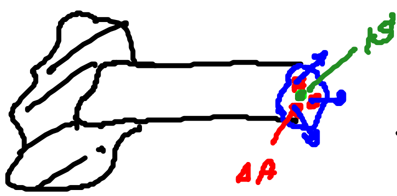
Thema: Schnittlasten



Auch im Innern gibt es Beanspruchungen!

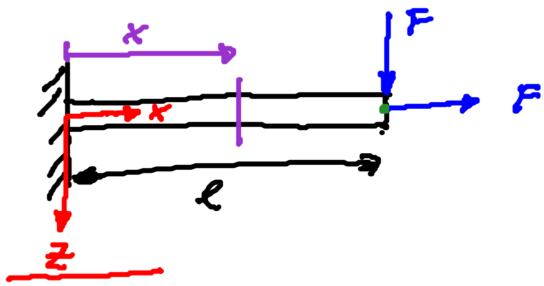
Sichtbarmachung durch Schnitt (senkrecht)



Die "Spannungen", die über die Fläche verteilt sind „fassen wir zusammen" zum Schnittlastenvektor, der dem Flächenschwerpunkt zugeordnet ist!

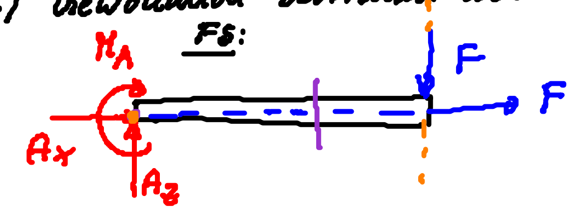
Beispiel:

Ebenes System



1.) Gewöhnlich bestimmt man zuerst die Auflagerreaktionen

FS:



GGB: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F + A_x = 0$

$$\underline{\underline{A_x = -F}}$$

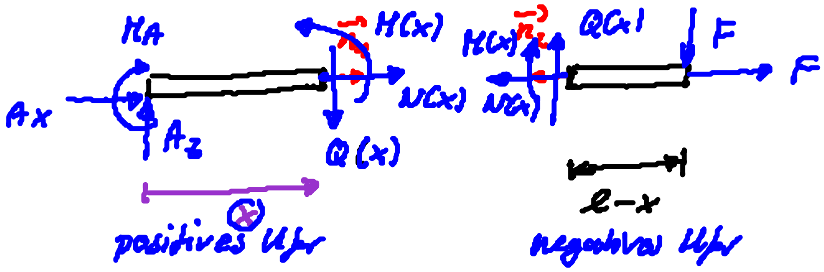
$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow F - A_z = 0 \Rightarrow \underline{\underline{A_z = F}}$$

$$\Sigma M^{(A)} = 0 \Rightarrow -M_A - F \cdot l = 0$$

$$\underline{\underline{M_A = -F \cdot l}}$$

2.) Berechnung der Schnittlasten:

- Senkrechter Schnitt an einer variablen Stelle $x \in (0, \ell)$



$\vec{n}_1, \vec{n}_2$: Normalenvektoren der Schnittflächen zeigen immer "raus".

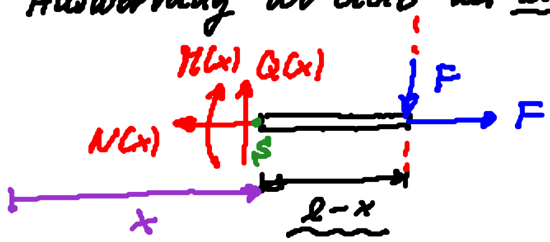
$\vec{n}_1, \vec{n}_2$ und das Koordinatensystem entscheiden darüber, welches Schnittufer positiv und welches negativ ist.

Zeigt $\vec{n}_i$ in posit. x-Richtung ist das Schnittufer positiv ...

Merke: Am positiven Schnittufer zeigen die Schnittlasten in positive Koordinatenrichtung.

$N(x), Q(x), M(x)$ – Schnittlasten!

- Auswertung der GGB an einem der Schnittufer



GGB: $\sum F_x = 0 \Rightarrow -N(x) + F = 0$

$$\underline{\underline{N(x) = F}}$$

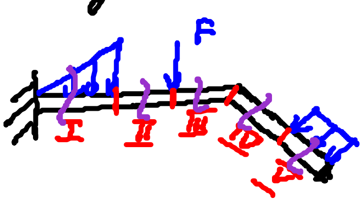
$\sum F_z = 0 \Rightarrow -Q(x) + F = 0$

$$\underline{\underline{Q(x) = F}}$$

$\sum M^{(S)} = 0 \Rightarrow -M(x) - F(\ell - x) = 0$

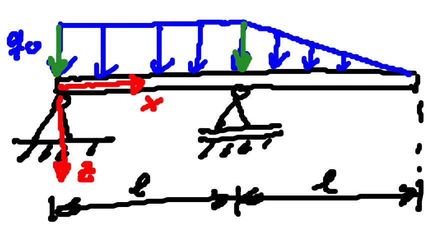
$$\underline{\underline{M(x) = -F(\ell - x)}}$$

Anmerkung: Wie gehen wir bei solchen Systemen vor?



Überall dort, wo sich die Geometrie bzw. die äußere Last (markant) ändert, beginnt ein neues "Feld". In jedem "Feld" muss geschnitten werden!

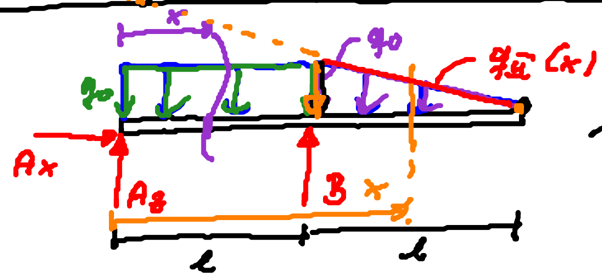
Aufgabe 71:

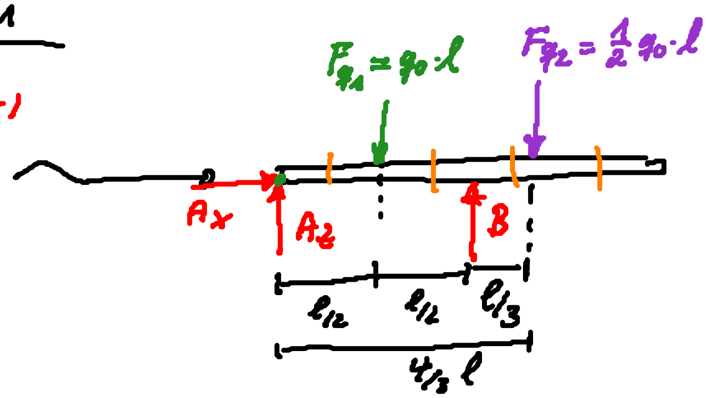


Gesucht: Schnittlasten mittels elementarer Freischnittmethode

(a) 2 Bereiche sind zu unterscheiden!

Berechnung der Auflagerreaktionen





GGB: $\sum F_x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{A_x = 0}}$

$$\sum M^{(A)} = 0 \Rightarrow -F_{q_1} \cdot \frac{l}{2} + B \cdot l - F_{q_2} \cdot \frac{4}{3} l = 0$$

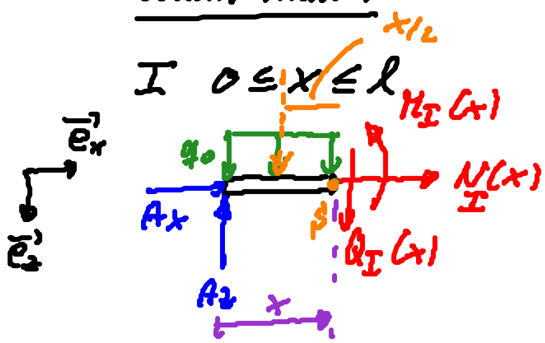
$$B = F_{q_1} \cdot \frac{1}{2} + F_{q_2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2} q_0 \cdot l + \frac{2}{3} q_0 \cdot l = \underline{\underline{\frac{7}{6} q_0 \cdot l}}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -A_z + F_{q_1} + F_{q_2} - B = 0$$

$$A_z = \underline{q_0 \cdot l + \frac{1}{2} q_0 l - \frac{7}{6} q_0 l} = \underline{\underline{\frac{1}{3} q_0 l}}$$

Schnittlasten:

I $\quad 0 \le x \le l$



GGB: $\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + N_I(x) = 0$

$$\underline{\underline{N_I(x)}} = -A_x = \underline{\underline{0}}$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -A_z + Q_I(x) + q_0 \cdot x = 0$$

$$\underline{\underline{Q_I(x)}} = A_z - q_0 x = \underline{\underline{\frac{1}{3} q_0 \cdot l - q_0 \cdot x}}$$

$$\sum M^{(S)} = 0 \Rightarrow M_I(x) - A_z \cdot x + q_0 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$M_I(x) = \frac{1}{3} q_0 \cdot l \cdot x - q_0 \frac{x^2}{2}$$

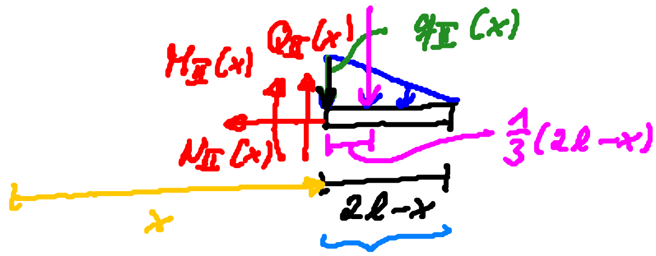
$$= -\frac{1}{2} q_0 \cdot l^2 \left(-\frac{2}{3} \frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{2} q_0 \cdot l^2 \left(\underbrace{\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{2}{3} \frac{x}{l} + \left(\frac{1}{3}\right)^2}_{\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{3}\right)^2} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{2} q_0 \cdot l^2 \left[\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} \right]$$

Schule: Scheitelpunktsform

II. Bereich: $\ell < x \le 2\ell$



mit $q_{II}(x) = -\frac{q_0}{\ell}x + 2q_0 = \frac{q_0}{\ell}(-x+2\ell)$

Probe an den Rändern:

$q_{II}(\ell) = q_0 \Rightarrow -\frac{q_0}{\ell}\cdot\ell + 2q_0 = q_0$ ✓

$q_{II}(2\ell) = 0 \Rightarrow -\frac{q_0}{\ell}\cdot 2\ell + 2q_0 = 0$ ✓

GGB: $\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{II}(x) = 0$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow -Q_{II}(x) + q_{II}(x)\frac{(2\ell-x)}{2} = 0$$

$$Q_{II}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{q_0}{\ell}x + 2q_0\right)(2\ell-x)$$

$$= \frac{1}{2}q_0\frac{1}{\ell}(-x+2\ell)\cdot(2\ell-x)$$

$$= +\frac{1}{2}\frac{q_0}{\ell}\cdot(2\ell-x)^2$$

$$\sum M^{(S)} = 0 \Rightarrow -M_{II}(x) - \frac{1}{2}q_{II}(x)\cdot(2\ell-x)\cdot\frac{1}{3}(2\ell-x) = 0$$

$$M_{II}(x) = -\frac{1}{2}\underbrace{\frac{q_0}{\ell}\overbrace{(-x+2\ell)}^{(2\ell-x)}}_{q_{II}(x)}\cdot\frac{1}{3}(2\ell-x)^2 = -\frac{1}{6}\frac{q_0}{\ell}(2\ell-x)^3$$

kubische Fkt. x^3 vorhanden

$\Rightarrow$ keine relativen Extrema

(b) Maximales Moment (betragsmäßig)

Untersuchung auf absolute Extrema:

$$M_I(x) = -\frac{1}{2}q_0\ell^2\left[\left(\frac{x}{\ell}-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right]$$

Relatives Extremum / Maximum

$$M_I\left(\frac{\ell}{3}\right) = \frac{1}{18}q_0\cdot\ell^2$$

[Scheitelpunkt]

Vgl. mit Rand- und Übergangswerten:

$$M_I(0) = 0\ ;\quad M_I(\ell) = -\frac{1}{2}q_0\cdot\ell^2\left[\underbrace{\left(\frac{\ell}{\ell}-\frac{1}{3}\right)}_{2/3}^2 - \frac{1}{9}\right] = -\frac{1}{2}q_0\cdot\ell^2\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{6}q_0\cdot\ell^2$$

$M_{II}(2\ell) = 0$;

$\Rightarrow$ Betragsmäßiges Maximum bei $x = \ell$:

$$\mathrm{Max}\{|M(x)|\} = |M(\ell)| = \frac{1}{6}q_0\cdot\ell^2$$

(c) Zu Hause probieren, Verläufe zu zeichnen! Aufklärung in nächster Übung!