Organisatorisches: Do 8-10 keine Tutorien!
Mo 14-16 H 3004
(gestrichen)
Fr. 14-16 Uhr im C230
einmalig im C 229!

Sprechstunden: Raum H 249

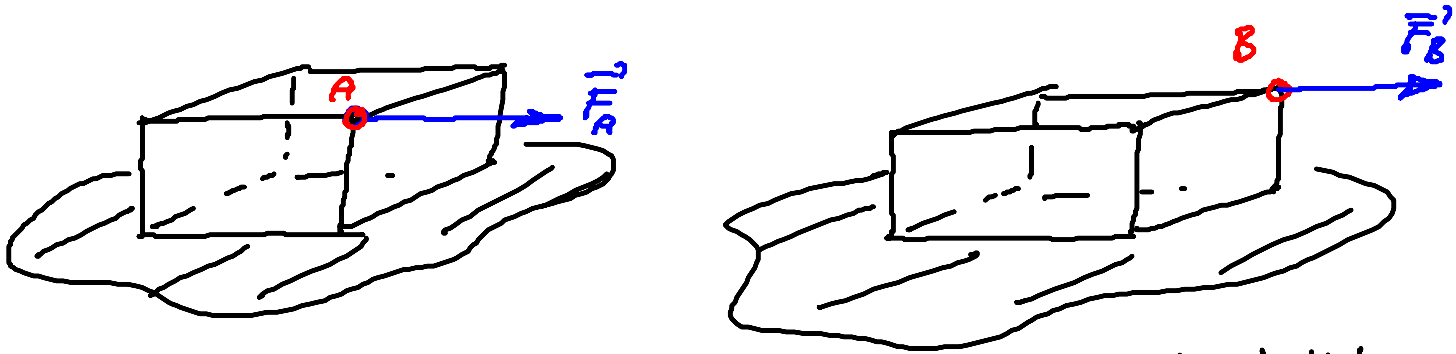
Thema: Einzelkraft, Kraftresultierende, Zentrale Kräftegruppe, Freischnitt, Gleichgewicht einer zentralen Kräftegruppe

Einzelkraft: Greift nur in einem Punkt des Körpers an!

Angriffspunkt!

Sie ist ein gebundener Vektor!

... gebunden an den Angriffspunkt!

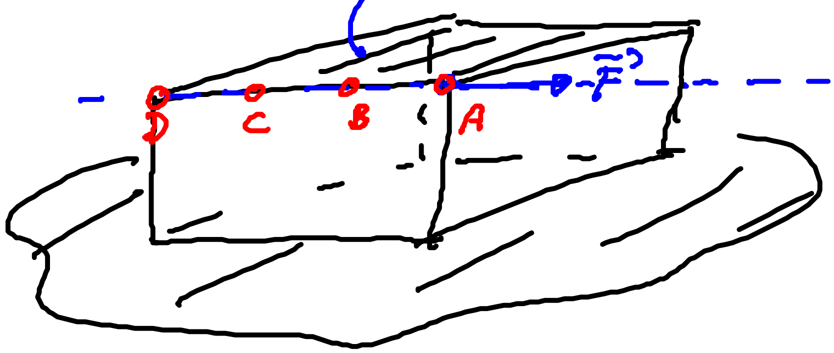


Sei $\vec{F}_A = \vec{F}_B$!

Unterschiedliche Wirkungen auf die Kiste

Linienflüchtigkeit der Kraft

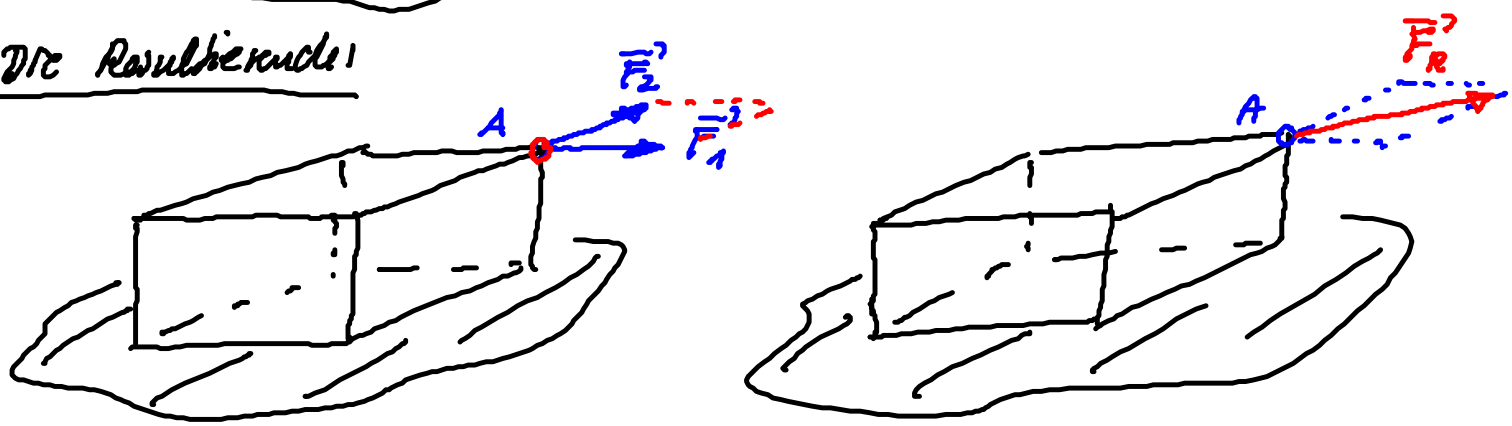
starrer Körper (rigid body)



Wirkungslinie der Kraft!

Es ist „egal", wo die Kraft auf der Wirkungslinie angreift.

Die Resultierende:

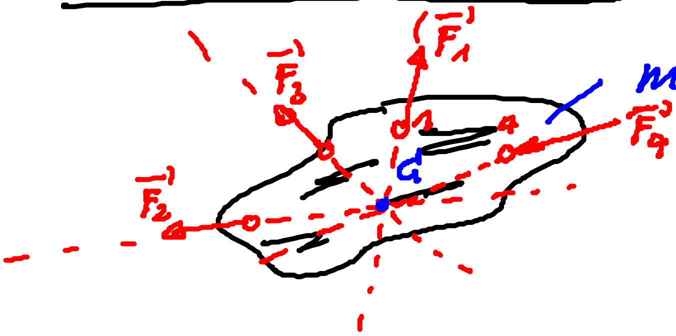


Die Wirkung in beiden Fällen ist gleich, wenn

$$\boxed{\vec{F}_R := \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n}$$

Kraftresultierende!

Zentrale Kräftegruppe:



mechanische Kartoffel!

Die Wirkungslinien aller Kräfte schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt
⇒ Zentrale Kräftegruppe!

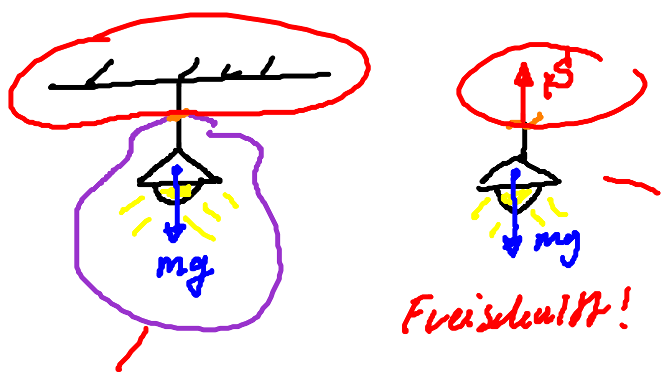
Gleichgewicht einer zentralen Kräftegruppe

Die Summe aller Einzelkräfte muss Null sein!

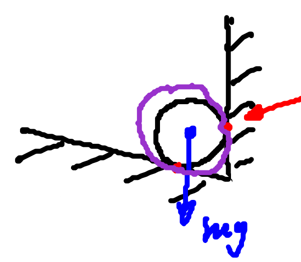
$$\vec F_1 + \vec F_2 + \vec F_3 + \dots + \vec F_n = \vec 0$$

Freischnitt (Lagrange'sches Befreiungsprinzip), Freikörperbild

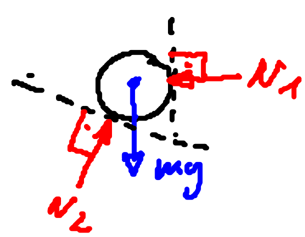
Das Gleichgewicht eines an die Umgebung gekoppelten Körpers ändert sich nicht, wenn wir den Körper von der Umgebung freimachen / trennen und als Ersatz für die Wirkung der Umgebung auf den Körper Einzelkräfte antragen.



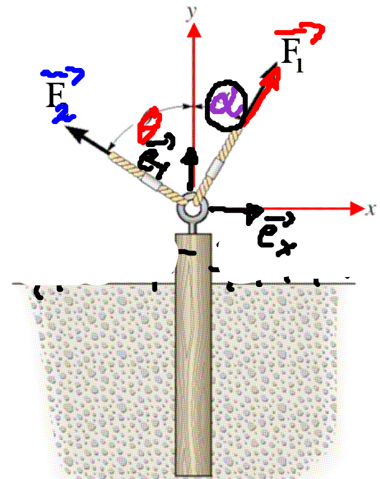
Freischnitt!



ideal glatt
⇒ es wirken nur Normalkräfte!



Aufgabe Z1:



Der skizzierte Pfosten soll mittels zweier Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ aus dem Boden gezogen werden. Die Resultierende der beiden Kräfte soll dabei senkrecht nach oben gerichtet sein und den Betrag $F_R := \left|\vec{F}_R\right| = 750\,\mathrm{N}$ besitzen. Beachten Sie, dass zudem der Winkel α und der Betrag der Kraft $\vec{F}_2$ gegeben sind. Ermitteln Sie den Betrag von $\vec{F}_1$und den Winkel θ, den die Kraft $\vec{F}_2$ mit der y-Achse einschließt!

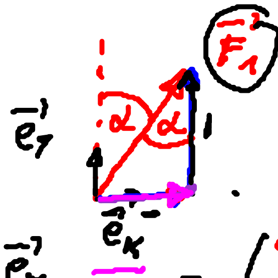
Gegeben: $F_R =$ $750\,\mathrm{N}$, $F_2 =$ $500\,\mathrm{N}$, $\alpha = 30^\circ$, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

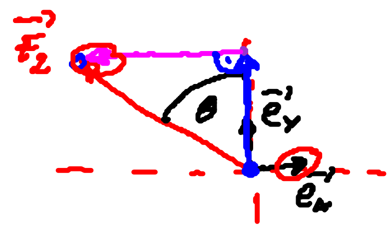
Hinweis: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

Gesucht: F_1, θ

Schreibe: $\vec e_x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec e_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Kraftvektoren:





$$\vec F_1 = \sin\alpha\, F_1 \vec e_x + \cos\alpha\, F_1 \vec e_y = \begin{pmatrix}\sin\alpha\, F_1\\ \cos\alpha\, F_1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\vec F_2 = \cos\theta \cdot F_2 \vec e_y - \sin\theta \cdot F_2 \vec e_x = \begin{pmatrix}-\sin\theta\, F_2\\ \cos\theta\, F_2\\ 0\end{pmatrix}$$

Resultierende: $$\vec F_R = \vec F_1 + \vec F_2 = \begin{pmatrix}\sin\alpha\, F_1 - \sin\theta\, F_2\\ \cos\alpha\, F_1 + \cos\theta\, F_2\\ 0\end{pmatrix} \quad (1)$$

Forderung: $$\vec F_R \overset{!}{=} \begin{pmatrix}0\\ F_{Ry}\\ 0\end{pmatrix} \quad (2)$$ F_R

Betrag: $F_R := |\vec F_R| = \sqrt{\underbrace{F_{Rx}^2}_{=0} + F_{Ry}^2 + \underbrace{F_{Rz}^2}_{=0}}$

Hier: $F_R = F_{Ry}$

(1) = (2) ⇒

I $\sin\alpha\, F_1 - \sin\theta\, F_2 = 0$

II $\cos\alpha\, F_1 + \cos\theta\, F_2 = F_R \quad // \cdot \sin\alpha$

aus I $\sin\alpha\, F_1 = \sin\theta\, F_2$ (H)

aus II $\sin\alpha \cdot \cos\alpha\, F_1 + \sin\alpha \cdot \cos\theta\, F_2 = F_R \cdot \sin\alpha$

$$\sin\theta\cdot\cos\alpha\, F_2 + \sin\alpha\cdot\cos\theta\cdot F_2 = F_R\cdot\sin\alpha$$

$$F_2\,\underbrace{(\sin\theta\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\theta)}_{\sin(\alpha+\theta)} = F_R\cdot\sin\alpha \qquad // : F_2$$

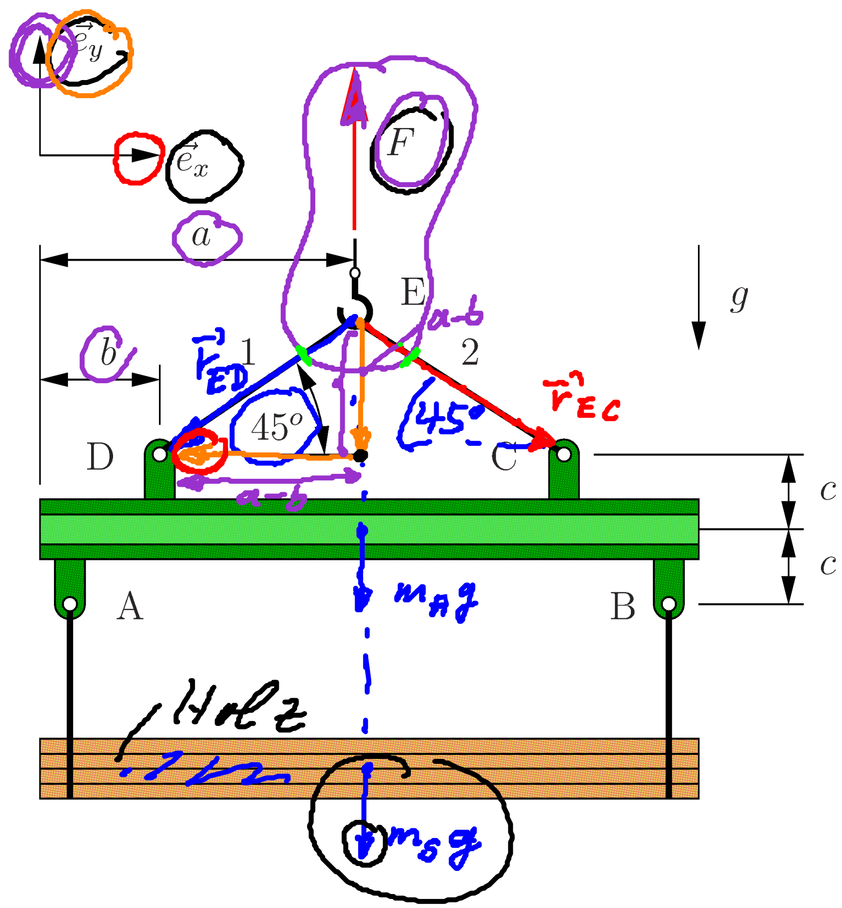
$$\sin(\alpha+\theta) = \frac{F_R}{F_2}\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha+\theta = \arcsin\left(\frac{F_R}{F_2}\cdot\sin\alpha\right)$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{F_R}{F_2}\cdot\sin\alpha\right) - \alpha \approx 18{,}6^\circ \quad (*)$$

$$(*) \text{ in } (H) \Rightarrow \quad F_1 = \frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\,F_2 \approx \underline{\underline{318{,}8\,N}}$$

---

6. Die abgebildete Hebevorrichtung wird zum Umschlagen von Holzstämmen verwendet. Das Seil und der Balken schließen stets einen Winkel von 45^o ein (siehe Abbildung). Der Schwerpunkt der Last liege stets genau unterhalb des Kranhakens. Die Masse m_S der Stämme sei 200 kg, die Masse m_H der Hebevorrichtung sei 50 kg.



(a) Wie groß ist die Kraft F im vertikalen Seil?

(b) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{F}_{EC}$ und $\vec{F}_{ED}$.

(c) Fertigen Sie eine Freischnittskizze des Hakens an. Wie lauten die Gleichgewichtsbedingungen? Geben Sie die Kräfte in den Seilen in vektorieller Form an.

(a) Kräftegleichgewicht: $\vec{F}_1 + \vec{G}_S + \vec{G}_H = \vec{0}$

$$F_1\,\vec{e}_y - m_S\, g\,\vec{e}_y - m_A\, g\,\vec{e}_y = \vec{0}$$

$$\underbrace{\left[F_1 - (m_S + m_A)\,g\right]}_{=0}\,\vec{e}_y = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad F_1 = (m_S + m_A)\,g$$

$$\boxed{\vec{F}_1 = (m_S + m_A)\, g\, \vec{e}_y}$$

(b) Abstandsvektoren:

$$\vec{r}_{ED} = -(a-b)\,\vec{e}_y - (a-b)\,\vec{e}_x$$

$$\vec{r}_{EC} = -(a-b)\,\vec{e}_y + (a-b)\,\vec{e}_x$$

(c) Freischnitt des Hakens