Aufgabe 1:

Gegeben seien die Eckpunkte eines in der x-y-Ebene liegenden Dreiecks

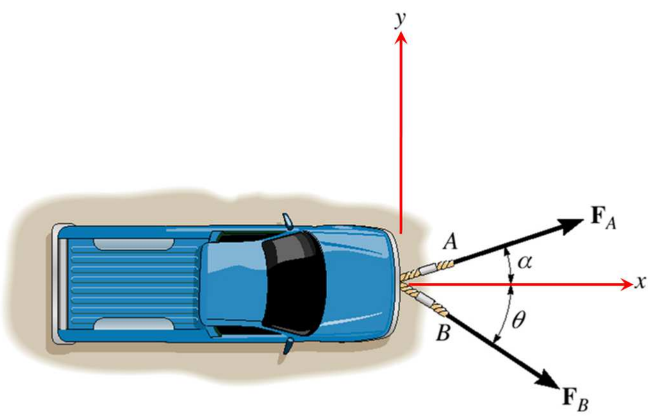
$$A\,(1\,|1\,)\,,\quad B\,(2\,|\,4\,)\,,\quad C\,(6\,|\,2\,)\,.$$

(a) Skizzieren Sie das Dreieck im kartesischen Koordinatensystem und stellen Sie die Ortsvektoren $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ und $\vec{r}_C$ zu den Eckpunkten auf.

(b) Ermitteln Sie die Abstandsvektoren $\vec{r}_{AB}$, $\vec{r}_{BC}$ und $\vec{r}_{CA}$. Berechnen Sie nun die Längen der Dreiecksseiten. Geben Sie zudem den Einheitsvektor $\vec{e}_C$ an, welcher von A nach B weist.

Aufgabe 2:

An einem PKW greifen wie skizziert die beiden Einzelkräfte $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ an, deren Beträge bekannt sind.



(a) Stellen Sie die Kraftvektoren $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ auf und berechnen Sie mittels einfacher Superposition ihre *Resultierende* $\vec{F}_R := \vec{F}_A + \vec{F}_B$.

(b) Bestimmen Sie den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$ und den Winkel β, den sie mit der x-Achse einschließt.

Gegeben: $F_A := \left|\vec{F}_A\right| = 2\,\mathrm{kN}$; $F_B := \left|\vec{F}_B\right| = 1\,\mathrm{kN}$; $\alpha = 30°$; $\theta = 45°$

Aufgabe 3:

Ermitteln Sie nachfolgende Determinanten. Für die Berechnung der dreireihigen Determinanten kann entweder der LAPLACEsche Entwicklungssatz oder aber die Regel von SARRUS angewendet werden.

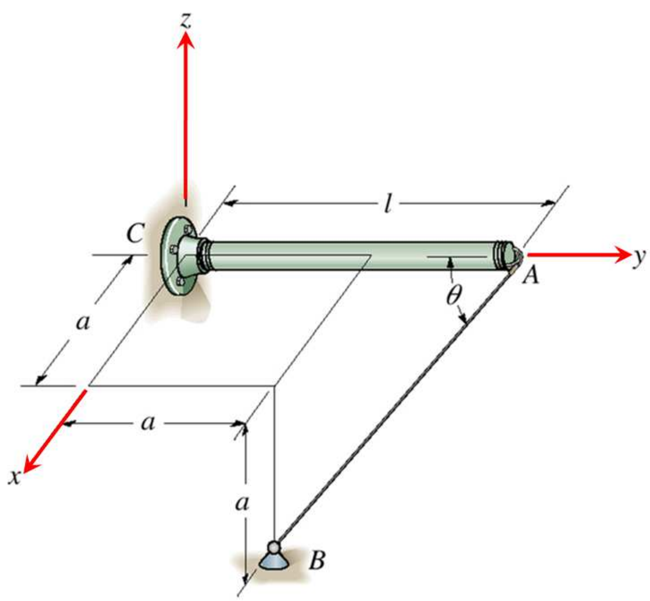
(a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 5 & \sqrt{8} \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -7 & 11 & 14 \\ -6 & 6 & -9 \end{vmatrix}$

Aufgabe 4:

Gegeben sind die beiden kartesischen Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie den Vektor $\vec{c} := \vec{a} \times \vec{b}$. Welchen Winkel schließen die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein?

Aufgabe 5:

Am Ende eines an einer Wand befestigten Rohres/Mastes der Länge l ist ein Seil zwischen den Punkten A und B abgespannt.



(a) Geben Sie sowohl den Abstandsvektor $\vec{r}_{AB}$ vom Punkt A zum Punkt B als auch $\vec{r}_{AC}$ vom Punkt A zum Punkt C an.

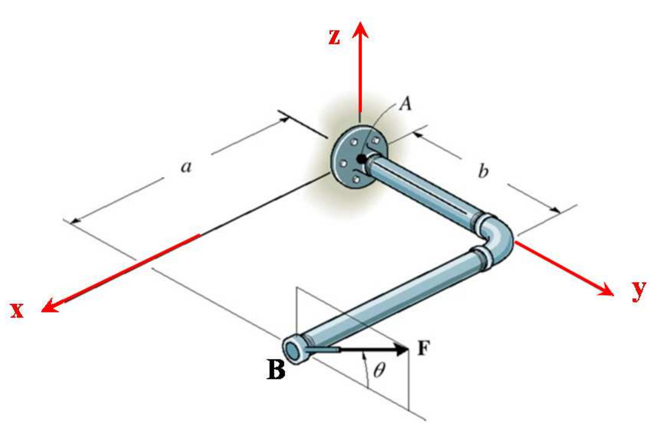
(b) Wie lang ist das Seil und wie lautet der Einheitsvektor, der von A in die Richtung von B zeigt?

(c) Ermitteln Sie den Winkel θ, den die beiden Vektoren $\vec{r}_{AB}$ und $\vec{r}_{AC}$ einschließen. Nutzen Sie dazu das *Vektorprodukt*![1]

Gegeben: $l = 3\,\text{m}$, $a = 2\,\text{m}$

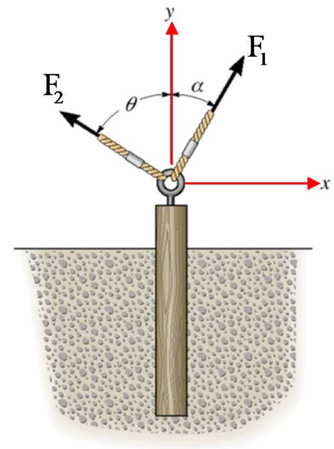
Aufgabe 6:

Bestimmen Sie das Moment $\vec{M}^{(A)}$ der Einzelkraft $\vec{F}$ bezüglich des Punktes A. Stellen Sie dazu zunächst den Abstandsvektor vom Bezugspunkt A zum Kraftangriffspunkt B und den Kraftvektor $\vec{F}$ auf. Bilden Sie anschließend das Vektorprodukt $\vec{r}_{AB} \times \vec{F}$. Ermitteln Sie auch den Betrag des Momentes.
Gegeben: $\theta = 30°$; $a = 2\,\text{m}$; $b = 1.5\,\text{m}$; $\left|\vec{F}\right| = 750\,\text{N}$



[1]Diejenigen StudentInnen, welche das Skalarprodukt kennen, können damit den berechneten Winkel überprüfen.

Aufgabe 7:



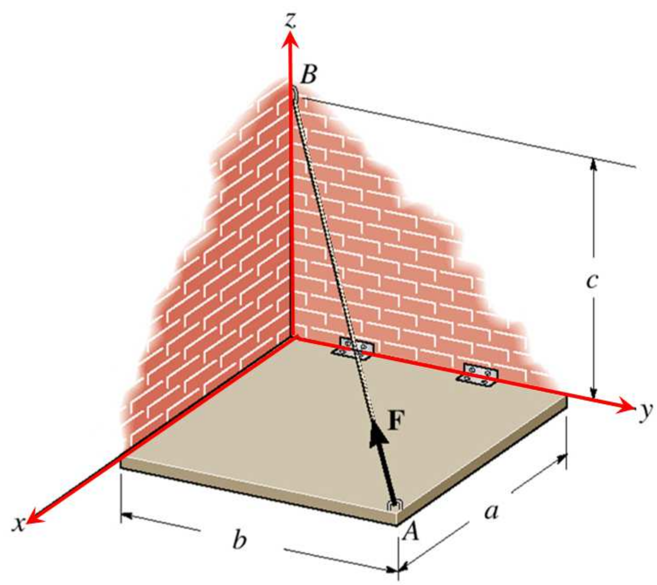
Der skizzierte Pfosten soll mittels zweier Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ aus dem Boden gezogen werden. Die Resultierende der beiden Kräfte soll dabei senkrecht nach oben gerichtet sein und den Betrag $F_R := \left|\vec{F}_R\right| = 750\,\mathrm{N}$ besitzen. Beachten Sie, dass zudem der Winkel α und der Betrag der Kraft $\vec{F}_2$ gegeben sind. Ermitteln Sie den Betrag von $\vec{F}_1$ und den Winkel θ, den die Kraft $\vec{F}_2$ mit der y-Achse einschließt!

Gegeben: $F_R = 750\,\mathrm{N}$, $F_2 = 500\,\mathrm{N}$, $\alpha = 30^\circ$, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

Hinweis: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

Aufgabe 8:

Eine klappbare Platte wird u. a. durch ein zwischen den Punkten A und B verlaufendes Seil im Gleichgewicht gehalten. Den Betrag F der Kraft in dem Seil $\vec{F}$ hat der Ingenieur bereits ermittelt.



(a) Stellen Sie zunächst den Abstandsvektor $\vec{r}_{AB}$ vom Punkt A zum Punkt B auf und berechnen Sie anschließend die Länge des Seiles.

(b) Bestimmen Sie den Einheitsvektor, welcher von A in die Richtung von B weist und geben Sie mit dessen Hilfe den eingezeichneten Kraftvektor $\vec{F}$ als Linearkombination der kartesischen Basis an.

(c) Ermitteln Sie das Moment der Einzelkraft $\vec{F}$ bezüglich des Ursprungs O. Wie groß ist sein Betrag?

Gegeben: $a = 2\,\mathrm{m}$, $b = 2.5\,\mathrm{m}$, $c = 3\,\mathrm{m}$, $F = 340\,\mathrm{N}$

Aufgabe 9:

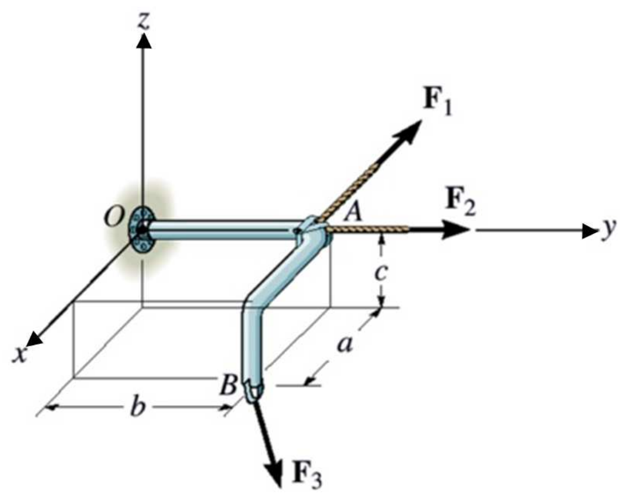
An einem Körper greift im Punkt A die Kraft $\vec{F}_A$ und im Punkt B die Kraft $\vec{F}_B$ an. Diese Kräfte und die Abstandsvektoren $\vec{r}_{CA}$ und $\vec{r}_{CB}$ der Punkte A und B von einem Bezugspunkt C sind nachfolgend gegeben:

$$\vec{r}_{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\,\mathrm{m}, \quad \vec{r}_{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\,\mathrm{m}, \quad \vec{F}_A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,\mathrm{kN}, \quad \vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\,\mathrm{kN}$$

Berechnen Sie das resultierende Moment $\vec{M}^{(C)}_{\mathrm{Res}}$ bezüglich des Punktes C mit Hilfe des *Vektorproduktes* und geben Sie seinen *Betrag* an!

Aufgabe 10:

Drei (gegebene) Einzelkräfte greifen wie skizziert an einem Rundstab an. Ermitteln Sie das resultierende Moment bezüglich des Ursprungs $\vec{M}^{(O)}_R$ mit Hilfe des Vektorproduktes. Stellen Sie dazu zunächst aus der Geometrie die jeweiligen Abstandsvektoren vom Bezugspunkt O zu den Kraftangriffspunkten A bzw. B auf und wenden Sie dann das Vektorprodukt an.



Gegeben: $a = 4\,\mathrm{m}$, $b = 5\,\mathrm{m}$, $c = 2\,\mathrm{m}$,

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -60 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}\mathrm{N},\ \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{N},\ \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ -30 \end{pmatrix}\mathrm{N}$$

Aufgabe 11:

Drei (gegebene) Einzelkräfte greifen wie skizziert an einem Mast an. Ermitteln Sie das resultierende Moment $\vec{M}^{(A)}_{\mathrm{R}}$ bezüglich des Punktes A mit Hilfe des Vektorproduktes. Stellen Sie dazu zunächst aus der Geometrie die jeweiligen Abstandsvektoren vom Bezugspunkt A zu den Kraftangriffspunkten auf und wenden Sie dann das Vektorprodukt an.

Ermitteln Sie auch den Betrag des resultierenden Momentes.

Gegeben: $a = 8\,\mathrm{m}$, $b = 4\,\mathrm{m}$, $c = 1\,\mathrm{m}$

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}\mathrm{N},\ \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 100 \\ -10 \\ -20 \end{pmatrix}\mathrm{N},\ \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -200 \end{pmatrix}\mathrm{N}$$