TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

Dr.-Ing. Markus Heß
www.reibungsphysik.de

Numerische Simulationsverfahren im Ingenieurwesen
(Haus-)Aufgabenblatt 3 WS 16/17

Thema: Elastische Gittermodelle – Isotrope Gittertensoren

Mit Hilfe von elastischen Gittermodellen soll die Bewegung eines homogenen, isotropen, linear-elastischen Kontinuums abgebildet werden. Dabei beschränken wir uns auf so kleine Verzerrungen, dass *geometrisch linear* gerechnet werden darf, d.h. zwischen den Verzerrungen und Verschiebungen besteht ein linearer Zusammenhang. Außerdem setzen wir ein zweidimensionales Kontinuum voraus, worunter eine *Scheibe* zu verstehen ist, in der bekanntermaßen ein Ebener Spannungszustand (ESZ) vorherrscht. Die die Bewegung eines Punktes des Kontinuums beschreibende Verschiebungsdifferenzialgleichung wurde von Lamé und Navier aufgestellt:

$$\rho \ddot{u}_i \;=\; \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} \; . \qquad (1)$$

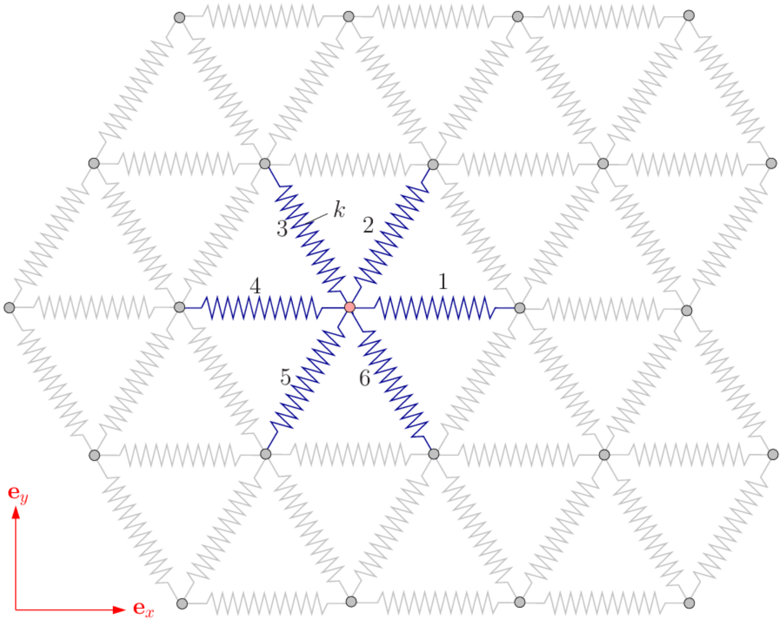
Darin bezeichnen λ und μ die sogenannten Laméschen Konstanten, die aus Messungen bestimmt werden müssen. Im Falle des ebenen Spannungszustandes sind die Laméschen Konstanten wie folgt mit dem Elastizitätsmodul E und der Poissonzahl ν miteinander verknüpft:

$$\lambda = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad \text{und} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \; , \qquad (2)$$

wobei G den Schubmodul meint.

Aufgabe 1: Hexagonales Gitter (Hausaufgabe)

Im Folgenden soll ein hexagonales, elastisches Gittermodell dazu genutzt werden (siehe Abb. rechts), um makroskopisch das Verhalten der Scheibenelemente und damit die Bewegungsdifferenzialgleichung (1) unter Berücksichtigung der Materialparameter gemäß (2) abzubilden. Das Gittermodell besteht aus Massepunkten auf einem hexagonalen Gitter, die über linear-elastische Längsfedern der Länge ℓ und der Steifigkeit k miteinander wechselwirken. Die Wechselwirkungen sind auf die *nächsten* Nachbarn begrenzt.



Gehen Sie zur Lösung der Aufgabe in folgenden Schritten vor:

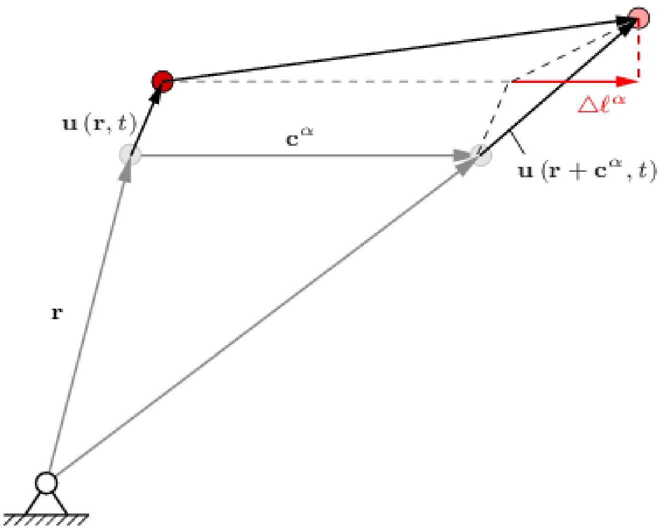
a) Stellen Sie die Koordinaten der Gittertensoren erster, zweiter, dritter und vierter Ordnung auf, d.h. berechnen Sie

$$L_i := \sum_{\alpha=1}^{6} e_i^\alpha, \quad L_{ij} := \sum_{\alpha=1}^{6} e_i^\alpha e_j^\alpha, \quad L_{ijk} := \sum_{\alpha=1}^{6} e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha, \quad L_{ijkl} := \sum_{\alpha=1}^{6} e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha \,. \tag{3}$$

b) Berechnen Sie die Längenänderungen der Federn $\Delta\ell^\alpha$ im Rahmen einer linearen Theorie, d.h. nutzen Sie als Näherung die Projektion der Differenz des Verschiebungsvektors auf die jeweilige Richtung der Gittervektoren:

$$\Delta\ell^\alpha \;:=\; \left[u_i\left(\vec{r}+\vec{c}^{\,\alpha},t\right)-u_i\left(\vec{r},t\right)\right]e_i^\alpha \tag{4}$$

und entwickeln Sie den Ausdruck bis hin zu Gliedern der Ordnung ℓ^2. Zum besseren Verständnis ist die linearisierte Verschiebungskinematik nach Glg. (4) in nachfolgender Abbildung gezeigt.



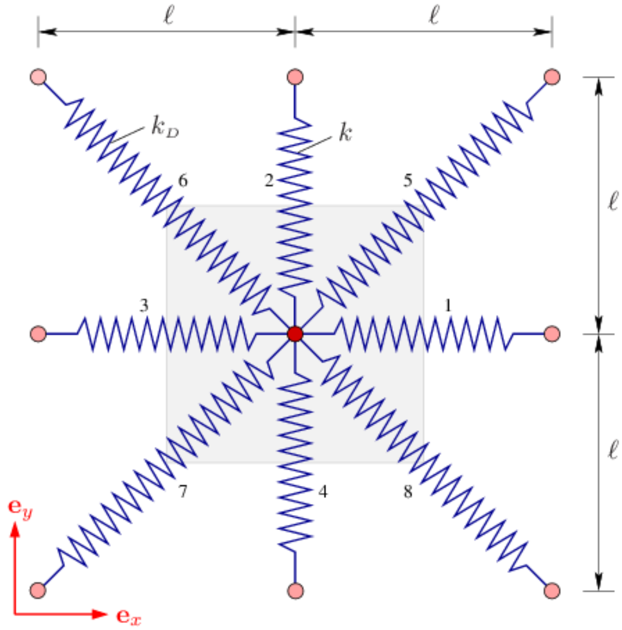
c) Schneiden Sie einen Massepunkt aus dem Gitter heraus und stellen Sie das 2. Newtonsche Grundgesetz auf. Beachten Sie dabei, dass der Freischnitt nach Theorie 1. Ordnung am unverformten System erfolgt. Die Federkräfte haben dabei nur Komponenten in Richtung der Gittervektoren.

d) Setzen Sie die unter a) und b) berechneten Größen in das unter c) aufgestellte Newtonsche Grundgesetz ein und formen Sie die entstehende Differenzialgleichung derart um, dass abgesehen von den Koeffizienten die Lamé-Naviersche Bewegungsdifferenzialgleichung gemäß (1) wieder zu erkennen ist. Damit ist der Beweis vollbracht, dass das elastische Gittermodell makroskopisch die Bewegung des Kontinuums beschreibt.

e) Welche Einschränkungen ergeben Sie für die elastischen Parameter E, ν bei dem zugrundegelegten hexagonalen Gitter, welches nur Wechselwirkungen zu den nächsten Nachbarn berücksichtigt? Geben Sie eine Idee an, wie man diese Einschränkungen aufheben könnte.

Abgabe bis spätestens zum 15. Dezember 2016

Aufgabe 2: Quadratisches Gitter mit Moore-Nachbarschaft (Übung)



Völlig analog der Aufgabe 1 kann man versuchen, das makroskopische Verhalten der linear-elastischen, isotropen Scheibe mit Hilfe der Dynamik auf einem quadratischen Gitter abzubilden. Es wird sich dann herausstellen, dass bei ausschließlicher Berücksichtigung von Wechselwirkungen zwischen den 4 nächsten Nachbarn (von Neumann-Nachbarschaft) dies nicht möglich ist. Gleiches gilt auch, wenn man die Nachbarschaft nach Moore erweitert und für diese zusätzlichen Wechselwirkungen die gleiche Federsteifigkeit unterstellt wie für die Bindung zu den 4 nächsten Nachbarn. Kann man die Steifigkeiten k_D der Federn zu den entfernteren Nachbarn jedoch unabhängig von den Steifigkeiten k der Federn zu den nächsten Nachbarn wählen, ist es durch geeignete Wahl möglich, isotropes Verhalten abzubilden. Dies mündet in die sogenannte *Methode der gewichteten Gittertensoren*. Das zugrundegelegte Modell ist rechterhand gezeigt.

a) Stellen Sie die Koordinaten der *gewichteten Gittertensoren* dritter und vierter Ordnung auf, d.h. berechnen Sie

$$\tilde{L}_{ijk} := \sum_{\alpha=1}^{8} k^\alpha \ell^\alpha e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha, \quad \tilde{L}_{ijkl} := \sum_{\alpha=1}^{8} k^\alpha \left(\ell^\alpha\right)^2 e_i^\alpha e_j^\alpha e_k^\alpha e_l^\alpha \;. \tag{5}$$

Da sich die Steifigkeiten der Bindungen zu den nächsten und übernächsten Nachbarn unterscheiden, müssen sie als Gewichtsfaktoren beachtet werden. Außerdem treten im Zuge der Berechnung zusätzliche Gewichtungen durch die Längen ℓ^α bzw. deren Quadrate auf.

b) Stellen Sie analog zu Teil b) aus Aufgabe 1 die Längenänderung einer Bindung/Feder auf, wobei die Verschiebungsänderung bis zu Gliedern der Ordnung ℓ^2 zu entwickeln ist.

c) Stellen Sie das 2. Newtonsche Grundgesetz für einen Massepunkt des Gitters auf und setzen die unter a) und b) berechneten Größen ein.
Hinweis: Die Federkräfte sollen stets in Richtung der Gittervektoren zeigen.

d) Unter welchen Bedingungen kann die Gitterdynamik zur makroskopischen Beschreibung der Dynamik des zweidimensionalen Kontinuums herangezogen werden? Welche Einschränkungen bestehen hinsichtlich der beiden elastischen Parameter E und ν?

Abgabe bis spätestens zum 15. Dezember 2016