# 2. Klausur Mechanik II SS 2007, Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

**Bitte deutlich schreiben!**

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| $\sum$ | |
| T | |

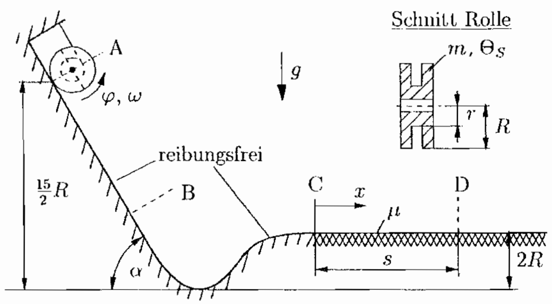
Name, Vorname: Mustermann

Matr.-Nr.:

Studiengang:

## 1 (Bekannte Aufgabe) (10 Punkte)

Eine Rolle mit der Masse $m$, dem Massenträgheitsmoment $\Theta_S$ und dem Außenradius $R$ wird in der Lage A festgehalten. Auf dem Innenradius $r$ der Rolle ist ein Seil mit $n$ Windungen aufgewickelt. Die Rolle wird losgelassen und dreht sich über das aufgewickelte Seil entlang der reibungsfreien Bahn bis zur Lage B ab. In B ist das Seil vollständig abgewickelt und löst sich von der Rolle, die sich auf der Bahn weiter bis C bewegt. Von C an ist die Bahn reibungsbehaftet. Die Rolle bewegt sich bis D, wo aufgrund ihres Dralles eine Bewegungsumkehr stattfindet.




Geg.: $m$, $g$, $R$, $r = \frac{1}{2}R$, $\alpha = 60°$, $\Theta_S = \frac{1}{2}mR^2$, $n = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}$, $\mu$

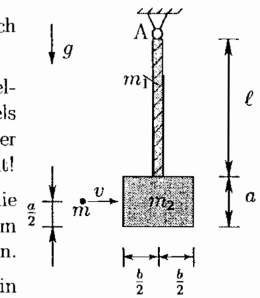
(a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgrößen der Rolle in C durch $v_C = \sqrt{2gR}$ und $\omega_C = 4\sqrt{\frac{g}{R}}$ gegeben sind. Beachten Sie den eingezeichneten Drehsinn von $\omega$.

(b) Bestimmen Sie die Wegstrecke $s$ (siehe Skizze) von C bis zum Umkehrpunkt D. Tipp: Schwerpunktsatz

Anmerkung: Der in der Hausaufgabe zu bearbeitende Aufgabenteil (c) ist nicht gefordert!

## 2 (5+4+3+1 Punkte)

Das Pendel besteht aus einem schlanken, homogenen Stab der Länge $\ell$ (Masse $m_1 = 6m$, Massenträgheitsmoment bzgl. seines Schwerpunktes $\Theta_s^{St} \approx \frac{1}{12}m_1\ell^2$) und einem homogenen Quader der Masse $m_2 = 6m$ mit den Abmessungen: Höhe $a$, Breite $b$, Tiefe $t$. Eine kleine Kugel (Massenpunkt!) der Masse $m$ trifft horizontal mit der Geschwindigkeit $v$ mittig auf den Quader. Das Pendel ist ursprünglich in Ruhe und der Stoß darf als ideal-elastisch angesehen werden.




(a) Ermitteln Sie das Massenträgheitsmoment des Pendels bezüglich des Drehpunktes A. (Explizite Berechnung verlangt!)

(b) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit des Pendels $\bar{\omega}$ unmittelbar nach dem Stoß, wenn das Massenträgheitsmoment des Pendels bezüglich A mit $\Theta_A = 69ma^2$ gegeben ist. Die Momentenstöße der Gewichtskräfte während des Stoßes sind nicht drehimpulsrelevant!

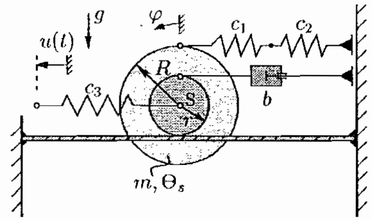
(c) Ermitteln Sie für die Bewegung des Pendels nach dem Stoß die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ als Funktion des Winkels $\varphi$ (z.B. mit dem Energieerhaltungssatz). Betrachten Sie dazu $\Theta_A$ und $\bar{\omega}$ als gegeben.

(d) Welchen maximalen Winkel erreicht das Pendel, wenn ein Überschlag ausgeschlossen ist?

Gegeben: $a$, $\ell = \frac{5}{2}a$, $b = 2a$, $t$, $v$, $m$, $m_1 = m_2 = 6m$, $g$, $\Theta_s^{St} \approx \frac{1}{12}m_1\ell^2$

## 3 (8+2+2+5 Punkte)

Die homogene, gestufte Kreisscheibe der Masse $m$ (Massenträgheitsmoment bzgl. des Schwerpunktes $\Theta_s$) führt auf einer horizontalen Schiene reine Rollbewegungen aus. Mittels einer harmonischen Wegvorgabe $u(t) = u_o\cos(\Omega t)$ des linken Endes der im Schwerpunkt befestigten, horizontalen Feder wird das System zu Schwingungen angeregt. Während die Federkräfte proportional ihrer Längenänderung sind, ist die Dämpferkraft (Dämpferkonstante $b$) geschwindigkeitsproportional anzunehmen.




(a) Stellen Sie zunächst die nichtlineare Bewegungsdifferentialgleichung auf. Wählen Sie dazu als Koordinate den Drehwinkel $\varphi$ der Scheibe.
Federn bzw. Dämpfer sind stets horizontal angeordnet (keine Schrägstellung)!

(b) Ermitteln Sie die linearisierte Bewegungsdifferentialgleichung für den Fall kleiner Drehwinkel $\varphi$ um den Entwicklungspunkt $\varphi_o = 0$.

Anmerkung: Bearbeiten Sie nachfolgende Aufgabenteile ausgehend von der linearen Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{4b}{3m}\dot{\varphi} + \frac{7c}{3m}\varphi = \frac{cu_o}{3mr}\cos(\Omega t)$$

(c) Geben Sie die Schwingungsdauer (Periode) $T_D$ der freien, schwach gedämpften Schwingung des Systems an. Wie groß ist der Dämpfungsgrad $D$?

(d) Leiten Sie für den eingeschwungenen Zustand die Vergrößerungsfunktion (Amplitudenfrequenzgang) zwischen Schwingungsantwort und Erregung her.
Skizzieren Sie die Vergrößerungsfunktion als Funktion der Abstimmung $\eta := \frac{\Omega}{\omega_o}$.

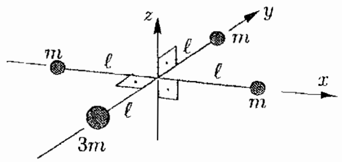
Gegeben: $r$, $R = 2r$, $g$, $c_1 = c_3 = c$, $c_2 = 2c$, $b$, $m$, $\Theta_s = 2mr^2$, $u(t) = u_o\cos(\Omega t)$

# Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m und s an:

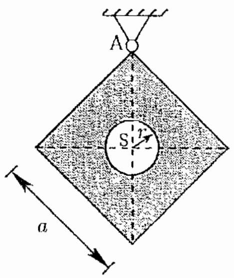
| | |
|---|---|
| Massenträgheitsmoment $\Theta$ | $kg \cdot m^2$ |
| Kraftstoß $\hat{F}$ | $kg \cdot m/s$ |
| Abklingkonstante $\delta$ | $1/s$ |
| Periode/Periodendauer $T$ | $s$ |

2. Wie groß ist das Massenträgheitsmoment des aus Massepunkten sowie masselosen Stäben bestehenden, starren Systems bezüglich der $x$-Achse?



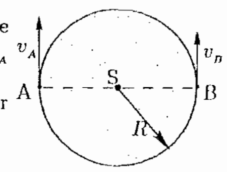

$$\Theta_{xx} = m\ell^2 + 3m\ell^2 = 4m\ell^2$$

3. Für das skizzierte System bestehend aus einer quadratischen, homogenen Scheibe (konstante Dicke $t$) mit zentrischem, kreisförmigen Loch ist sowohl die Masse $m$ als auch das Massenträgheitsmoment bezüglich des Drehpunktes A durch $\Theta_A$ gegeben.
Ermitteln Sie das Massenträgheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes $\Theta_S$.
Gegeben: $\Theta_A$, $m$, $t$, $a$, $r$




$$\Theta_S = \Theta_A - m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \Theta_A - \frac{1}{2}ma^2$$

4. Gegeben sind die Geschwindigkeiten zweier materieller Randpunkte A und B einer starren, homogenen Kreisscheibe vom Radius $R$. ($\vec{v}_A$ und $\vec{v}_B$ sind rein vertikal gerichtet!)
Geben Sie den Betrag der Geschwindigkeit des Schwerpunktes S der Kreisscheibe an.
Gegeben: $R$, $v_A$, $v_B$




$$v_S = \frac{1}{2}(v_A + v_B)$$

5. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der folgenden Bewegungsdifferentialgleichung:
$\ddot{x} + a\dot{x} - 2a^2x = 0$ ($a$ sei eine maßeinheitenbehaftete, positive Konstante)

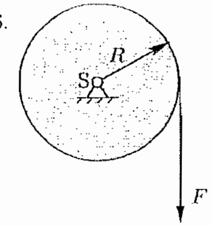
Ansatz: $x(t) = Ae^{\lambda t}$

$\Rightarrow \lambda^2 + a\lambda - 2a^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2a^2}$

$\lambda_1 = a \wedge \lambda_2 = -2a$

$\Rightarrow \underline{x(t) = A_1 e^{at} + A_2 e^{-2at}}$

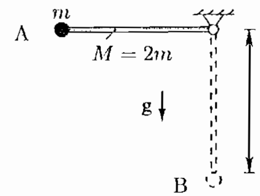
6. An einer homogenen Kreisscheibe, welche in ihrem Schwerpunkt frei drehbar gelagert ist, wirkt wie skizziert eine konstante Kraft $F$. Welche Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ hat die Scheibe nach einer Zeitspanne $\Delta t$, wenn sie anfänglich in Ruhe war?
Gegeben: $\Theta_S$, $F$, $R$, $\Delta t$




$L_{nach} - L_{vor} = \int_0^{\Delta t} RF\,dt \Rightarrow \Theta_S\bar{\omega} = RF\Delta t$

$\underline{\bar{\omega} = \frac{RF\Delta t}{\Theta_S}}$

7. Das skizzierte Pendel bestehend aus einem massebehafteten Stab (Länge $\ell$; Masse $M = 2m$) und einer Punktmasse $m$ an seinem Ende wird aus der horizontalen Ruheposition A losgelassen. Wie groß ist die kinetische Energie des Pendels beim Erreichen des (vertikalen) Zustandes B?
Gegeben: $\ell$, $g$, $m$, $M = 2m$



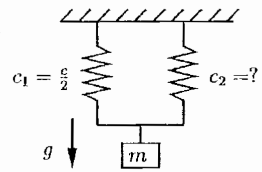

$K_A + U_A = K_B + U_B \Leftrightarrow 0 = K_B - \left(Mg\frac{\ell}{2} + mg\ell\right)$

$\Rightarrow \underline{K_B = 2mg\ell}$

8. Für das nebenstehende System im Erdschwerefeld ist die Eigenkreisfrequenz durch

$$\omega_o = \sqrt{\frac{2c}{3m}}$$

gegeben. Ermitteln Sie die Steifigkeit $c_2$! Gegeben: $m$, $g$, $c$

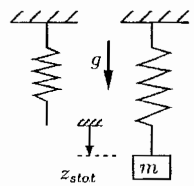



$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{m}} \Rightarrow c^* = \frac{2}{3}c$

Parallelschaltung: $c^* = c_1 + c_2$

$\Rightarrow \frac{2}{3}c = \frac{c}{2} + c_2 \Rightarrow \underline{c_2 = \frac{1}{6}c}$

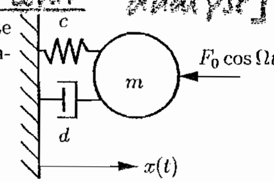
9. Für das nebenstehende System im Erdschwerefeld wurde die statische Auslenkung $z_{stat}$ gemessen. Geben Sie die Eigenkreisfrequenz des Systems in Abhängigkeit der gegebenen Größen an!
Gegeben: $m$, $g$, $z_{stat}$




$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ; $z_{stat} = \frac{mg}{c} \Rightarrow \frac{c}{m} = \frac{g}{z_{stat}}$

$\Rightarrow \underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{z_{stat}}}}$ [Dimensionsanalyse]

10. Mit welcher Kreisfrequenz schwingt der skizzierte fremderregte Einmassenschwinger im eingeschwungenen Zustand? (Bitte ankreuzen!)




- [ ] Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems $\omega_o$.
- [ ] Eigenkreisfrequenz des gedämpften Systems $\omega_D$.
- [x] Erregerkreisfrequenz $\Omega$.