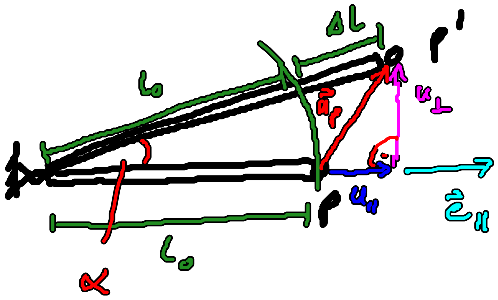
9. Übung: Linearisierte Kinematik / Torsion

1)



$\vec u_P = u_x \vec e_x + u_y \vec e_y$

ΔL : Längenänderung $\left(\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}\right)$

$\underbrace{\cos(\alpha)}_{\approx 1} = \frac{L_0 + u_\parallel}{L_0 + \Delta L}$, kleine Winkel : Linearisierung

$\sin(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \dots \approx \alpha$

$\cos(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots \approx 1$

$\cancel{L_0} + \Delta L = \cancel{L_0} + u_\parallel$

$\Delta L = u_\parallel$

$u_\parallel = \vec e_\parallel \cdot \vec u_P$

$\boxed{\Delta L = \vec e_\parallel \cdot \vec u_P}$ $\Longrightarrow$ Verformungskinematik

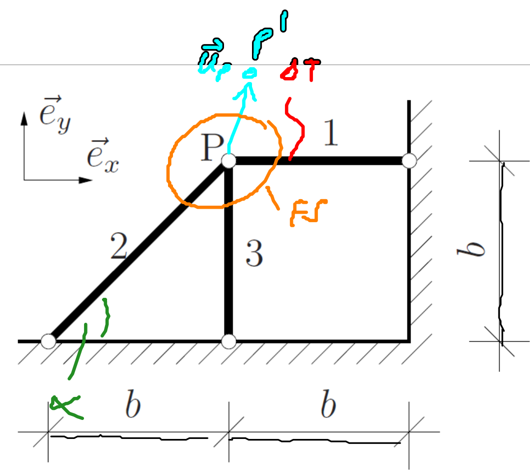
$\vec e_\parallel$: Richtung des Stabes!

$\vec u_P$: Verschiebung von P

84. Stab 1 der abgebildeten Konstruktion wird um ΔT erwärmt.

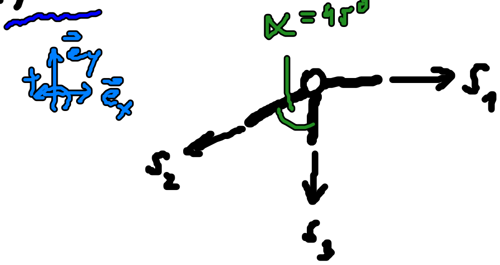
Berechnen Sie die Komponenten u_x und u_y der Verschiebung des Knotens P. (Beachten Sie die eingezeichnete Vektorbasis.)

Geg.: b, ΔT, Querschnittsfläche A = const, Elastizitätsmodul E, Temperaturausdehnungskoeffizient α



Lösung mit „Kochrezept"!

1) FS:



GGB:

$x: 0 = -S_2 \sin(\alpha) + S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} S_2$ (1)

$y: 0 = -S_3 - S_2 \cos(\alpha) \Rightarrow S_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_2$ (2)

System ist statisch unbestimmt

2) MSG:

$$\varepsilon = \varepsilon_{th} + \varepsilon_{el} = \alpha_T \Delta T + \frac{\sigma}{E} \; ; \; \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \; ; \; \sigma = \frac{S}{A}$$

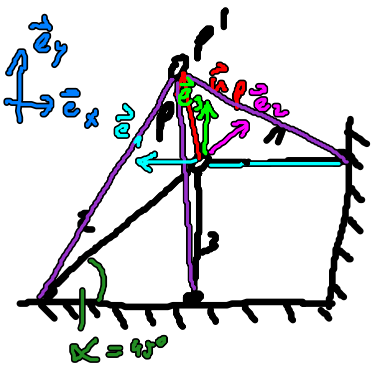
Stab 1: $\varepsilon_1 = \alpha_T \Delta T + \frac{\sigma_1}{E} \Rightarrow \frac{\Delta l_1}{l_1} = \alpha_T \Delta T + \frac{S_1}{EA}$ (3)

Stab 2: $\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} \Rightarrow \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{S_2}{EA}$ (4)

Stab 3: $\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} \Rightarrow \frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{S_3}{EA}$ (5)

6 Unbekannte aber nur 5 Gleichungen ↗

3) Kinematik: Wie hängen die Verschiebungen zusammen?



Zusammenhang Δl_i und $\vec u_P$? ✓

$$\Rightarrow \Delta l_i = \vec e_i \cdot \vec u_P$$

mit: $\vec u_P = u_x \vec e_x + u_y \vec e_y$ (u_x, u_y unbekannt)

$\vec e_1 = -\vec e_x \Rightarrow \Delta l_1 = \vec e_1 \cdot \vec u_P = -\vec e_x \cdot (\underbrace{u_x \vec e_x}_{\vec e_x \cdot \vec e_x = 1} + \overbrace{u_y \vec e_y}^{\vec e_x \cdot \vec e_y = 0})$

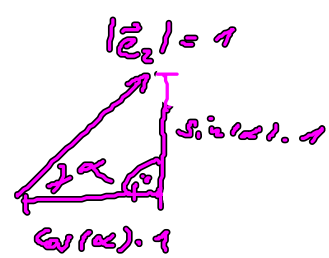
$\Delta l_1 = -u_x$ (6)

$\vec e_2 = \cos(\alpha) \vec e_x + \sin(\alpha) \vec e_y$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \vec e_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec e_y \Rightarrow \Delta l_2 = \vec e_2 \cdot \vec u_P = \frac{\sqrt{2}}{2} u_x + \frac{\sqrt{2}}{2} u_y$ (7)

$\vec e_3 = \vec e_y \Rightarrow \Delta l_3 = u_y$ (8)

8 Unbekannten 8 Gleichungen ✓



4) Auflösen: Nach $\vec u_P = (u_x, u_y)$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= S_2 \tfrac{\sqrt{2}}{2} && (1) \\ S_3 &= -S_2 \tfrac{\sqrt{2}}{2} && (2) \end{aligned} \right\} \text{GGB}$$

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \alpha_T \Delta T + \frac{S_1}{EA} \quad (3) \qquad \Rightarrow \qquad -u_x = \underbrace{l_1}_{=6}\left(\alpha_T \Delta T + \frac{S_1}{EA}\right) \quad (3)'$$

$$\frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{S_2}{EA} \quad (4) \qquad \text{MSG} \Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} u_x + \frac{\sqrt{2}}{2} u_y = \underbrace{l_2}_{=\sqrt{2}\,6} \frac{S_2}{EA} \quad (4)'$$

$$\frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{S_3}{EA} \quad (5) \qquad \Rightarrow \qquad u_y = \underbrace{l_3}_{=6} \frac{S_3}{EA} \quad (5)'$$

$$\Delta l_1 = -u_x \quad (6)$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} u_x + \frac{\sqrt{2}}{2} u_y \quad (7) \qquad \text{Kinematik}$$

$$\Delta l_3 = u_y \quad (8)$$

$$(3)': \quad -u_x \overset{(1)}{=} 6\left(\alpha_T \Delta T + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{S_2}{EA}\right) \Rightarrow -u_x = 6\left(\alpha_T \Delta T + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\cancel{\frac{1}{EA}}\left(-\cancel{\frac{2}{\sqrt{2}}}\,\cancel{\frac{EA}{6}}\,u_y\right)\right)$$

$$(5)': \quad u_y \overset{(2)}{=} -6\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{S_2}{EA} \quad \Rightarrow \quad S_2 = -\frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{EA}{6}\,u_y$$

Alles in $(4)'$ u_x

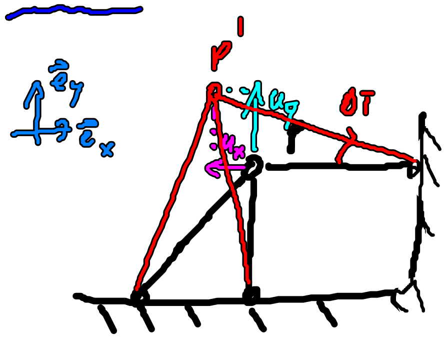
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cancel{6}\,\alpha_T\,\cancel{6}\,\Delta T + \frac{1}{\cancel{6}}\,u_y\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}u_y = \cancel{\sqrt{2}\,6}\,\cancel{\frac{1}{EA}}\left(-\cancel{\frac{2}{\sqrt{2}}}\,\cancel{\frac{EA}{6}}\,u_y\right) = -2u_y$$

$$\sqrt{2}\,u_y - \frac{\sqrt{2}}{2}6\alpha_T \Delta T = -2u_y$$

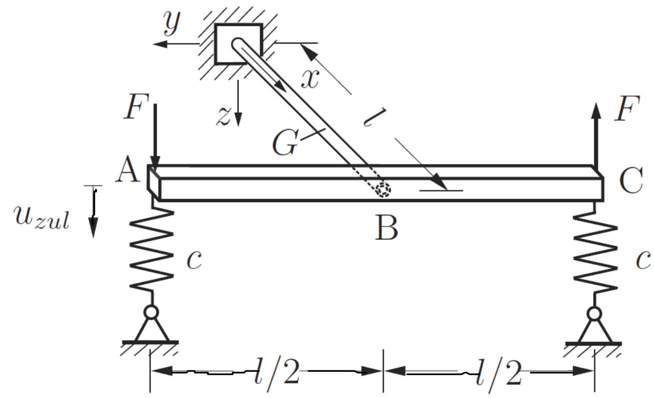
$$(\sqrt{2}+2)u_y = \frac{\sqrt{2}}{2}6\alpha_T \Delta T \quad \Rightarrow \quad u_y = \cancel{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}\,\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\frac{6\alpha_T \Delta T}{2+\sqrt{2}} = \frac{6\alpha_T \Delta T}{2\sqrt{2}+2}$$

$$u_x = -\frac{1+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}\,6\alpha_T \Delta T$$

Skizze 1



101. Ein Stab mit Kreisringquerschnitt (Außenradius R, Innenradius r) ist wie abgebildet eingespannt. Am anderen Ende des Stabes ist ein starrer Balken angeschweißt, der durch zwei Federn abgestützt wird.

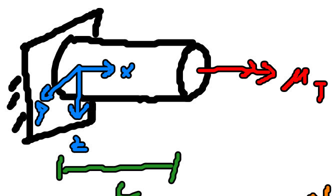


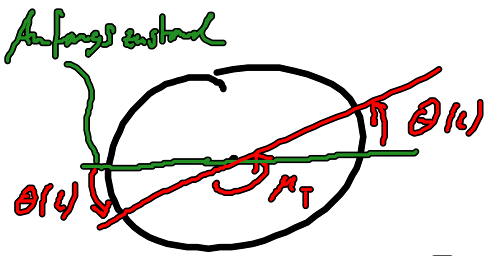
(a) Geben Sie die maximal mögliche Kraft $F_{\max}$ an, wenn im Punkt A die zulässige Verschiebung u_{zul} (in z-Richtung) vorgegeben ist.

(b) Wo im Stabquerschnitt tritt die maximalen Schubspannung für $F = F_{\max}$ auf und wie groß ist sie?

Geg.: $R = 10$ cm, $r = 5$ cm, $l = 2$ m, $c = 10^6$ Nm^{-1}, $u_{zul} = 2$ cm, $G = 8 \cdot 10^{10}$ Nm^{-2},

2) Torsion:





θ : Verdrehwinkel

polares Flächenträgheitsmoment

homogene Torsion

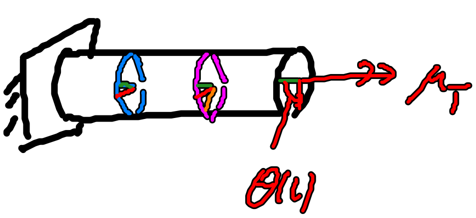
MSG: $M_T = G I_p \theta' = G I_p \frac{d\theta}{dx} \Rightarrow M_T = G I_p \frac{\theta(l)}{l}$

Schubmodul

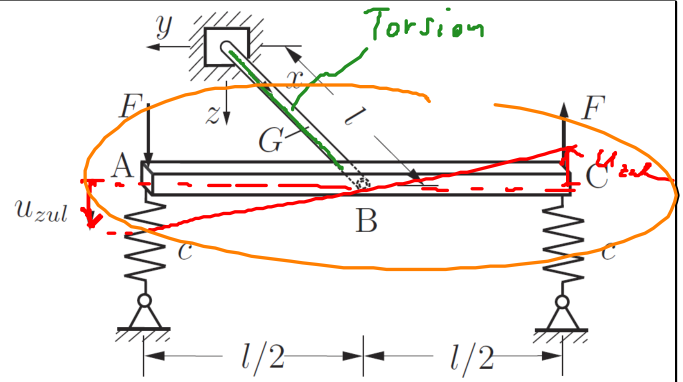
Stab: $\sigma = E\varepsilon$

homogene Dehnung

$N = EA\varepsilon = EAu' = EA\frac{du}{dx} \Rightarrow N = EA\frac{\Delta l}{l}$



101. Ein Stab mit Kreisringquerschnitt (Außenradius R, Innenradius r) ist wie abgebildet eingespannt. Am anderen Ende des Stabes ist ein starrer Balken angeschweißt, der durch zwei Federn abgestützt wird.



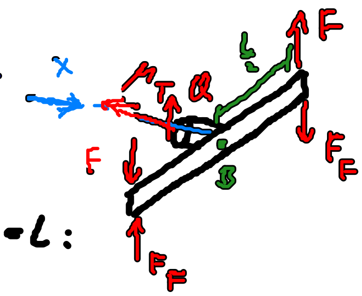
(a) Geben Sie die maximal mögliche Kraft $F_{\max}$ an, wenn im Punkt A die zulässige Verschiebung u_{zul} (in z-Richtung) vorgegeben ist.

(b) Wo im Stabquerschnitt tritt die maximalen Schubspannung für $F = F_{\max}$ auf und wie groß ist sie?

Geg.: $R = 10$ cm, $r = 5$ cm, $l = 2$ m, $c = 10^6$ Nm^{-1}, $u_{zul} = 2$ cm, $G = 8 \cdot 10^{10}$ Nm^{-2},

⟹ "Rezept"

1) FS:



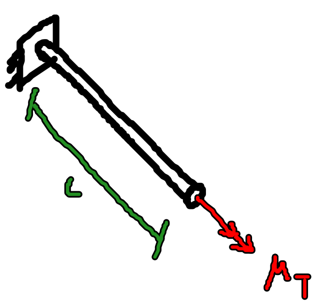
$x = L$:

GGB: $M_x^B : 0 = -M_T + F\frac{L}{2} + F\frac{L}{2} - F_F\frac{L}{2} - F_F\frac{L}{2}$

$M_T = FL - F_F \cdot L$ (1)

2) MSG:

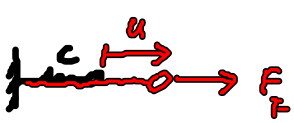
i) Stange:



$M_T = G I_p \Theta' = G I_p \frac{\Theta(L)}{L}$ (2)

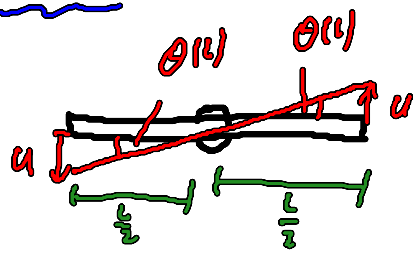
"$N = EA\varepsilon = EA\frac{\Delta L}{L}$"

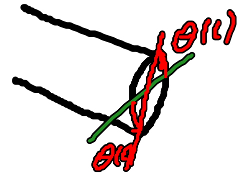
ii) Feder: (Lineare Feder)



$F_F = c\,u$ (3)

3) Kinematik:





$$\frac{L}{2} \sin(\theta(L)) = u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{L}{2}\,\theta(L) \qquad (4)$$

$\approx \theta(L)$

Zusammenhang $\theta(L)$ und u

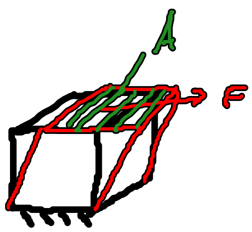
4) Auflösen:

...

Maximum $u = zul$

$$F = \left(\frac{2G I_p}{L^3} + c\right) u \quad \Rightarrow \quad P_{max} = u_{zul}\left(\frac{2G I_p}{L^3} + c\right) = 78{,}9\,kN$$

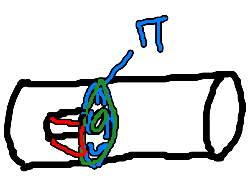
b) ges: Maximale Schubspannung?



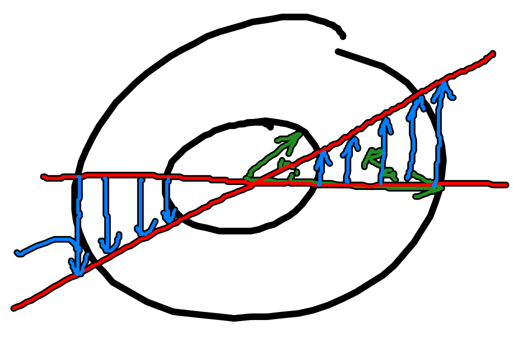
$$\tau = \frac{F}{A}$$

„Tau"

Kreisring



$$\tau = \frac{M_T}{I_p} \cdot r \quad \Rightarrow$$



τ_{max}

$$\tau_{max} = \frac{M_T}{I_p} \cdot R_a$$

Tut: 82, 95, 80 ; Ma: 86, 23, 98, 93