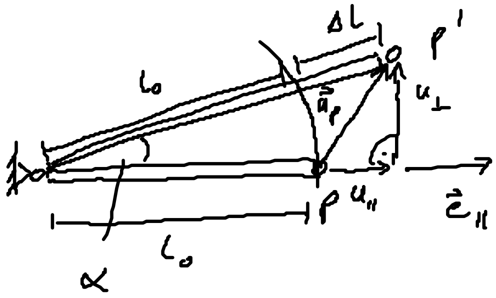
9. Übung: Linearisierte Kinematik / Torsion

1)



$\vec{u}_P = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$

ΔL : Längenänderung $\left(\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}\right)$

$\cos(\alpha) = \frac{L_0 + u_\parallel}{L_0 + \Delta L}$, kleine Winkel: Linearisierung

≈ 1

$\sin(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \dots \approx \alpha$

$\cos(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots \approx 1$

$\cancel{L_0} + \Delta L = \cancel{L_0} + u_\parallel$

$\Delta L = u_\parallel$

$u_\parallel = \vec{e}_\parallel \cdot \vec{u}_P$

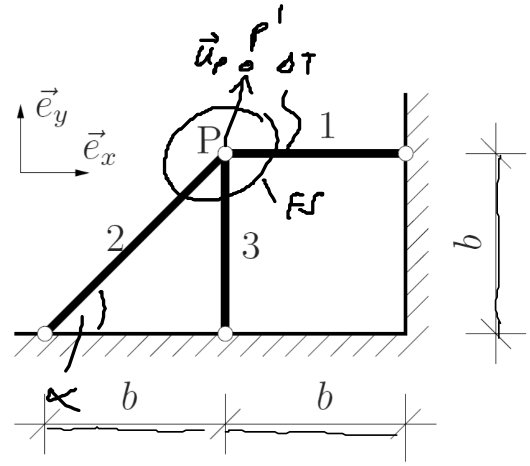
$\boxed{\Delta L = \vec{e}_\parallel \cdot \vec{u}_P} \Longrightarrow$ Verformungskinematik

Richtung des Stabes! Verschiebung von P

84. Stab 1 der abgebildeten Konstruktion wird um ΔT erwärmt.

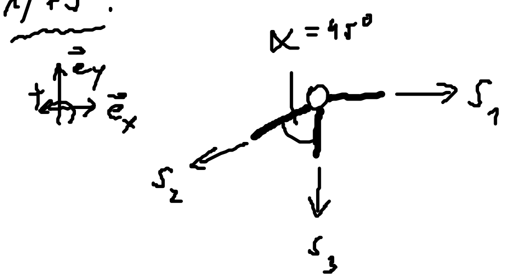
Berechnen Sie die Komponenten u_x und u_y der Verschiebung des Knotens P. (Beachten Sie die eingezeichnete Vektorbasis.)

Geg.: b, ΔT, Querschnittsfläche $A = \text{const}$, Elastizitätsmodul E, Temperaturausdehnungskoeffizient α



Lösung mit „Kochrezept"!

1) FS:



GGB:

$X: 0 = -S_2 \sin(\alpha) + S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 \quad (1)$

$y: 0 = -S_3 - S_2 \cos(\alpha) \Rightarrow S_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} S_2 \quad (2)$

System ist statisch unbestimmt

2) MSG:

$$\varepsilon = \varepsilon_{th} + \varepsilon_e = \alpha_T \Delta T + \frac{\sigma}{E} \; ; \; \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \; ; \; \sigma = \frac{S}{A}$$

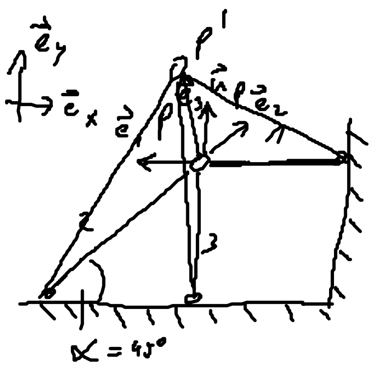
Stab 1: $\varepsilon_1 = \alpha_T \Delta T + \frac{\sigma_1}{E} \Rightarrow \frac{\Delta l_1}{l_1} = \alpha_T \Delta T + \frac{S_1}{EA}$ (3)

" 2: $\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} \Rightarrow \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{S_2}{EA}$ (4)

" 3: $\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} \Rightarrow \frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{S_3}{EA}$ (5)

6 Unbekannte aber nur 5 Gleichungen ↗

3) Kinematik: wie hängen die Verschiebungen zusammen?



Zusammenhang Δl_i und $\vec{u}_P$?

$$\Rightarrow \Delta l_i = \vec{e}_i \cdot \vec{u}_P$$

mit: $\vec{u}_P = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$ (u_x, u_y unbekannt)

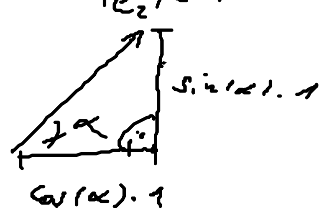
$\vec{e}_1 = -\vec{e}_x \Rightarrow \Delta l_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{u}_P = \overbrace{-\vec{e}_x \cdot (\underbrace{u_x \vec{e}_x}_{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1} + u_y \vec{e}_y)}^{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0}$

$\Delta l_1 = -u_x$ (6)

$\vec{e}_2 = \cos(\alpha) \vec{e}_x + \sin(\alpha) \vec{e}_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y \Rightarrow \Delta l_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{u}_P = \frac{\sqrt{2}}{2} u_x + \frac{\sqrt{2}}{2} u_y$ (7)

$\vec{e}_3 = \vec{e}_y \Rightarrow \Delta l_3 = u_y$ (8)

8 Unbekannte, 8 Gleichungen ✓



4) Auflösen: Nach $\vec{u}_P = (u_x, u_y)$

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1) \\ S_3 &= -S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \end{aligned}\right\} \text{GGB}$$

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \alpha_T \Delta T + \frac{S_1}{EA} \quad (3) \qquad \Rightarrow \qquad -u_x = \underbrace{l_1}_{=b}\left(\alpha_T \Delta T + \frac{S_1}{EA}\right) \quad (3)'$$

$$\frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{S_2}{EA} \quad (4) \qquad \text{MSG} \Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} u_x + \frac{\sqrt{2}}{2} u_y = \underbrace{l_2}_{=\sqrt{2}b} \frac{S_2}{EA} \quad (4)'$$

$$\frac{\Delta l_3}{l_3} = \frac{S_3}{EA} \quad (5) \qquad \Rightarrow \qquad u_y = \underbrace{l_3}_{=b} \frac{S_3}{EA} \quad (5)'$$

$$\Delta l_1 = -u_x \quad (6)$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} u_x + \frac{\sqrt{2}}{2} u_y \quad (7) \qquad \text{Kinematik}$$

$$\Delta l_3 = u_y \quad (8)$$

$$(3)' : \; -u_x \overset{(1)}{=} b\left(\alpha_T \Delta T + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{S_2}{EA}\right) \Rightarrow -u_x = b\left(\alpha_T \Delta T + \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} \frac{1}{\cancel{EA}}\left(-\frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{2}}}\frac{\cancel{EA}}{b} u_y\right)\right)$$

$$(5)' : \; u_y \underset{(2)}{=} -b \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{S_2}{EA} \qquad \Rightarrow \qquad S_2 = -\frac{2}{\sqrt{2}} \frac{EA}{b} u_y$$

Alles in $(4)'$ u_x

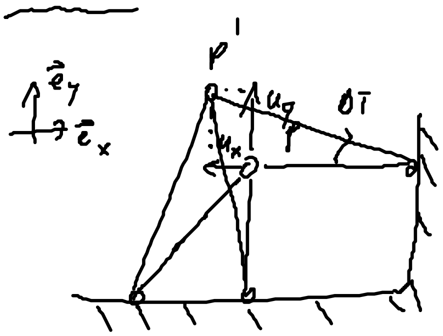
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cancel{b}\left(-\alpha_T b \Delta T + \frac{1}{\cancel{b}} u_y\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} u_y = \cancel{\sqrt{2}}\cancel{b} \frac{1}{\cancel{EA}}\left(-\frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}}\frac{\cancel{EA}}{\cancel{b}} u_y\right) = -2u_y$$

$$\sqrt{2} u_y - \frac{\sqrt{2}}{2} b \alpha_T \Delta T = -2 u_y$$

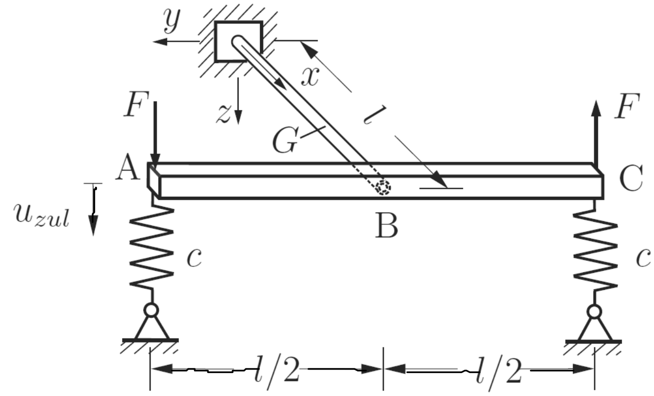
$$(\sqrt{2} + 2) u_y = \frac{\sqrt{2}}{2} b \alpha_T \Delta T \qquad \Rightarrow \qquad \underline{u_y} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cancel{2}} \frac{b \alpha_T \Delta T}{2 + \sqrt{2}} = \frac{b \alpha_T \Delta T}{2\sqrt{2} + 2}$$

$$\underline{u_x} = -\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2}} b \alpha_T \Delta T$$

Skizze 1



101. Ein Stab mit Kreisringquerschnitt (Außenradius R, Innenradius r) ist wie abgebildet eingespannt. Am anderen Ende des Stabes ist ein starrer Balken angeschweißt, der durch zwei Federn abgestützt wird.

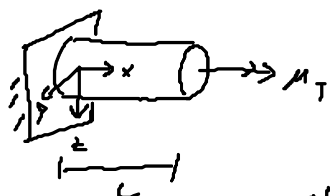


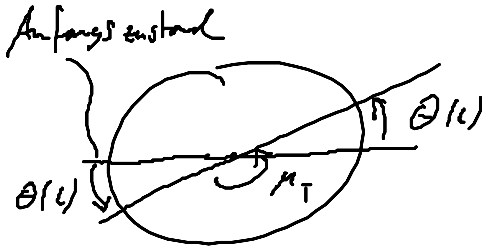
(a) Geben Sie die maximal mögliche Kraft $F_{\max}$ an, wenn im Punkt A die zulässige Verschiebung u_{zul} (in z-Richtung) vorgegeben ist.

(b) Wo im Stabquerschnitt tritt die maximalen Schubspannung für $F = F_{\max}$ auf und wie groß ist sie?

Geg.: $R = 10$ cm, $r = 5$ cm, $l = 2$ m, $c = 10^6$ Nm^{-1}, $u_{zul} = 2$ cm, $G = 8 \cdot 10^{10}$ Nm^{-2},

2) Torsion :





Θ : Verdrehwinkel

polares Flächenträgheitsmoment

homogene Torsion

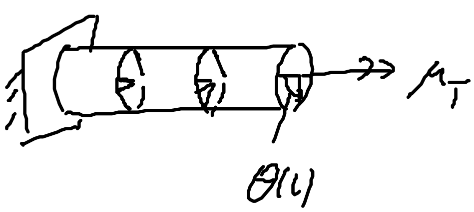
MSG : $M_T = G I_p \Theta' = G I_p \frac{d\Theta}{dx} \Rightarrow M_T = G I_p \frac{\Theta(l)}{L}$

Schubmodul

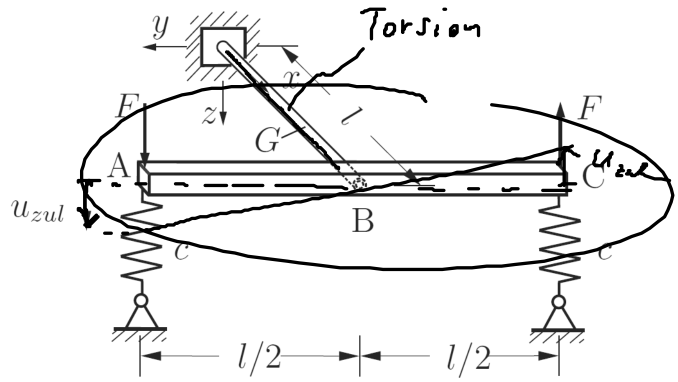
homogene Dehnung

Stab : $\sigma = E\varepsilon$

$N = EA\varepsilon = EAu' = EA\frac{du}{dx} \Rightarrow N = EA\frac{\Delta L}{L}$



101. Ein Stab mit Kreisringquerschnitt (Außenradius R, Innenradius r) ist wie abgebildet eingespannt. Am anderen Ende des Stabes ist ein starrer Balken angeschweißt, der durch zwei Federn abgestützt wird.



(a) Geben Sie die maximal mögliche Kraft $F_{\max}$ an, wenn im Punkt A die zulässige Verschiebung u_{zul} (in z-Richtung) vorgegeben ist.

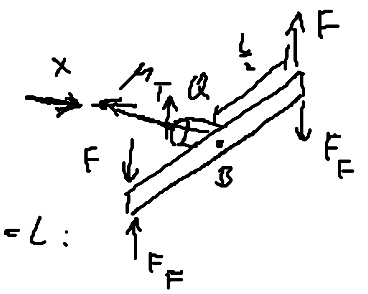
(b) Wo im Stabquerschnitt tritt die maximalen Schubspannung für $F = F_{\max}$ auf und wie groß ist sie?

Geg.: $R = 10$ cm, $r = 5$ cm, $l = 2$ m, $c = 10^6$ Nm^{-1}, $u_{zul} = 2$ cm, $G = 8 \cdot 10^{10}$ Nm^{-2},

⟹ Rezept"

1) FS:

$x = L$:

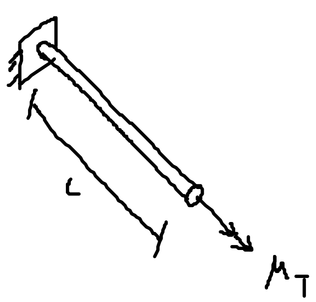


GGB: $M_x^B : 0 = -M_T + F\frac{L}{2} + F\frac{L}{2} - F_F\frac{L}{2} - F_F\frac{L}{2}$

$$M_T = FL - F_F \cdot L \qquad (1)$$

2) MSG:

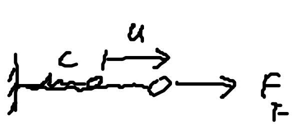
i) Stange:



$$M_T = G I_p \theta' = G I_p \frac{\theta(L)}{L} \qquad (2)$$

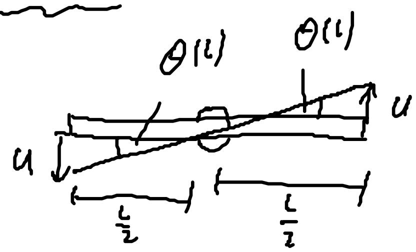
$$N = EA\varepsilon = EA\frac{\Delta L}{L}$$

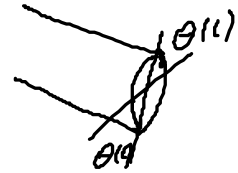
ii) Federn: (Linear Feder)



$$F_F = c\,u \qquad (3)$$

3) Kinematik:





$\frac{L}{2}\sin(\theta(L)) = u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{L}{2}\,\theta(L) \qquad (4)$

$\approx \theta(L)$

Zusammenhang $\theta(L)$ und u

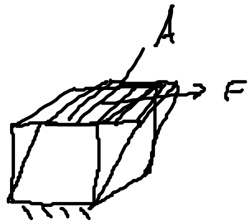
4) Auflösen:

...

Maximum $u = \text{zul}$

$$F = \left(\frac{2 G I_p}{L^3} + c\right) u \quad \Rightarrow \quad P_{max} = u_{zul}\left(\frac{2 G I_p}{L^3} + c\right) = 78{,}9\,kN$$

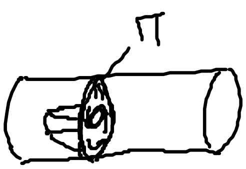
b) ges: Maximale Schubspannung?



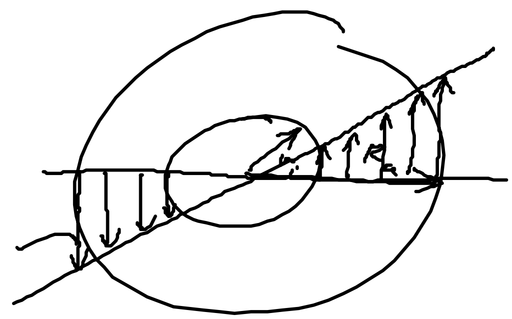
$\tau = \frac{F}{A}$

„Tau"

Kreisring



$\tau = \frac{M_T}{I_p}\cdot r \quad \Rightarrow$



τ_{max}

$\tau_{max} = \frac{M_T}{I_p}\cdot R_a$

Tut: 82, 95, 80 ; Ma: 86, 93, 98, 99