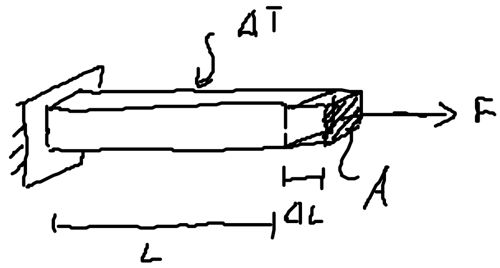
8. Übung: Spannungen / Dehnung

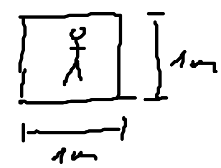
1)



$\Delta L \sim F$

$\frac{F}{A} = \sigma$ – „Sigma", Spannung

$[\sigma] = \frac{N}{m^2} = Pa$



Hooke'sches Gesetz

$\sigma = E \varepsilon_e$

$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon$ – „Epsilon", Dehnung

$[\varepsilon] = 1$

2)

$\varepsilon_{th} = \alpha_T \cdot \Delta T$ – Dehnung durch Temperaturänderung

$[\frac{1}{K}]$ $[K]$ α_T: Temperatur-koeffizient

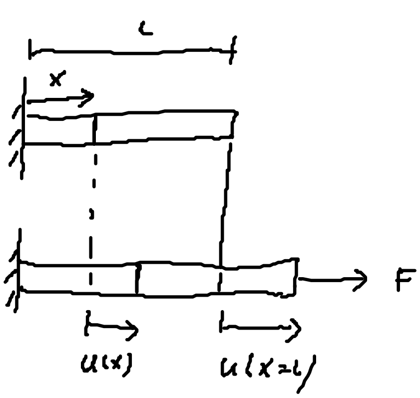
3)

$\varepsilon_{ges} = \varepsilon_{th} + \varepsilon_e$

$\frac{\Delta L}{L} = \alpha_T \Delta T + \frac{\sigma}{E}$

4) Nicht-homogene Dehnung

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{\sigma(x)}{E(x)} \Rightarrow u(x) = \int \frac{\sigma(x)}{E(x)} dx + C$$



u(x) – Verschiebung des Querschnitts bei „x"

5) Vorgehen (Kochrezept):

1.) FS, GGB aufstellen => Kräfte

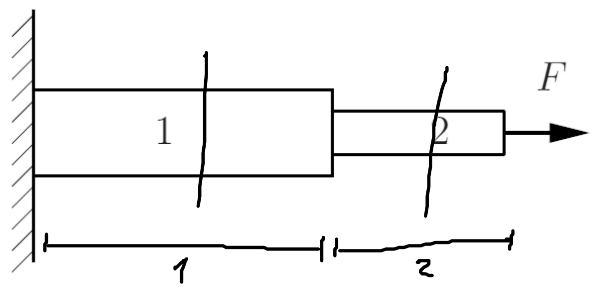
2.) Materialstrukturgesetze „aufschreiben"

3.) Kinematische Zusammenhänge

4.) Auflösen

Aufgabe 77

Das abgebildete mechanische System besteht aus zwei Stäben (Längen: $l_1 = 10$ cm, $l_2 = 8$ cm, Durchmesser: $d_1 = 3$ cm, $d_2 = 2$ cm, E-Modul: $E_1 = E_2 = 210$ GPa). Am rechten Ende greift die Kraft $F = 20$ kN an.



Wie groß ist die gesamte Längenänderung?

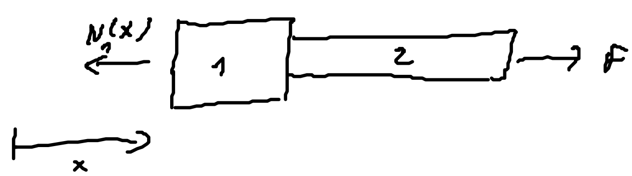
Lösung mit „Rezept"

Hooke: $\sigma = E\varepsilon$

E-Modul, $[E] = \frac{N}{m^2}$

1) FS + GGB:

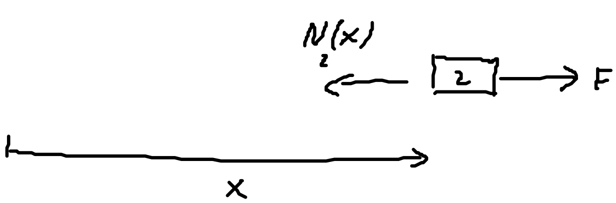
1:



$X: 0 = -N_1(x) + F$

$N_1(x) = F \quad (1)$

2:



$X: 0 = -N_2(x) + F$

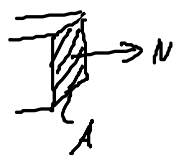
$N_2(x) = F \quad (2)$

2) Materialstrukturgleichungen:

Hooke: $\sigma = E\varepsilon \quad \Rightarrow \quad$ Stab 1: $\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 = E_1 \frac{\Delta l_1}{L_1} \quad (3)$

Stab 2: $\sigma_2 = E_2 \, \varepsilon_2 = E_2 \frac{\Delta l_2}{l_2}$ (4)

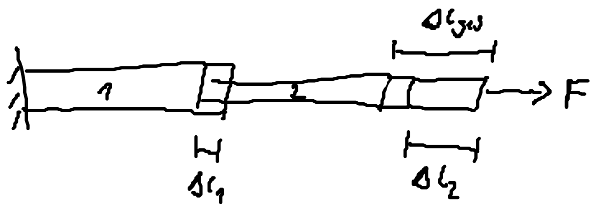
mit: $\sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}$ (5)



$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}$ (6)

(5),(6) in (3),(4): $\frac{N_1}{A_1} = E_1 \frac{\Delta l_1}{l_1}$ (3)', $\frac{N_2}{A_2} = E_2 \frac{\Delta l_2}{l_2}$ (4)'

3) Kinematik:



$\Delta l_{ges} = \Delta l_1 + \Delta l_2$ (7)

4) Auflösen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{N_1}{A_1}\frac{l_1}{E_1} = \frac{F}{A_1}\frac{l_1}{E_1} \\ \Delta l_2 &= \frac{N_2}{A_2}\frac{l_2}{E_2} = \frac{F}{A_2}\frac{l_2}{E_2} \end{aligned}\right\} (7):$$

$$\Delta l_{ges} = \frac{F}{A_1}\frac{l_1}{E_1} + \frac{F}{A_2}\frac{l_2}{E_2}$$

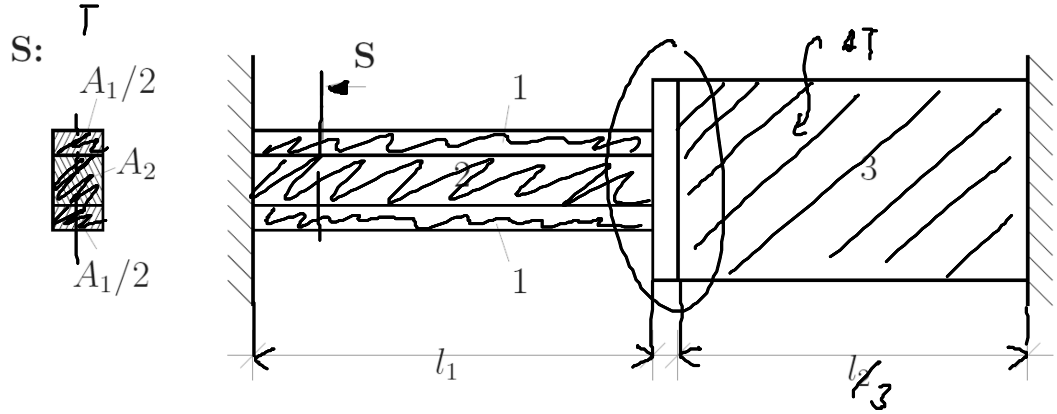
$$\underset{E_1 = E_2}{=} \frac{F}{E}\left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2}\right)$$

mit: $A_i = \pi r_i^2 = \pi \left(\frac{d_i}{2}\right)^2$

$$\Delta l_{ges} = \frac{20 \cdot 10^3 \, N}{210 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \pi}\left(\frac{0.1 \, m}{(0.015)^2 \, m^2} + \frac{0.08 \, m}{(0.01)^2 \, m^2}\right) = 37.73 \cdot 10^{-6} \, m = \underline{\underline{37.73 \, \mu m}}$$

Aufgabe 9 1

Der skizzierte Stab besteht in seinem rechten Teil 3 aus einem homogenen Werkstoff, in seinem linken Teil (1 und 2) aus einem symmetrisch aufgebauten Verbund-Körper. Zwischen den Teilen des Stabes befindet sich eine starre Platte. Der Stab liegt zunächst spannungsfrei zwischen zwei festen Widerlagern. Dann wird Teil 3 des Stabes um eine Temperatur $\Delta\cancel{\vartheta}$ T erwärmt.



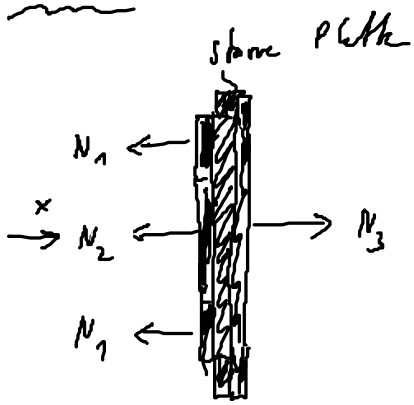
(a) Wie groß sind die Normalspannungen in den drei Querschnittsteilen?

(b) Wie groß ist die Verschiebung der starren Platte?

Geg.: $l_1 = 4,00$m, $l_2 = 3,50$m
$A_1 = 300\text{cm}^2$, $E_1 = 2\cdot 10^4\text{N/mm}^2$,
$A_2 = 100\text{cm}^2$, $E_2 = 2\cdot 10^5\text{N/mm}^2$,
$A_3 = 700\text{cm}^2$, $E_3 = E_1 = 2\cdot 10^4\text{N/mm}^2$,
$\alpha_{t3} = 12\cdot 10^{-6}\,1/\text{K}$. $\Delta\cancel{\vartheta}$ T $= 40$K

a) ges: σ_i → Lösung mit Kochrezept

1) FS (Platte)



GGB: $x: 0 = N_3 - N_2 - 2N_1$

$$N_3 = N_2 + 2N_1 \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow N = \sigma A$$

$$\underline{\sigma_3}\, A_3 = \underline{\sigma_2}\, A_2 + \cancel{2}\,\underline{\sigma_1}\, \frac{A_1}{\cancel{2}} \quad (1)'$$

Nachträglich korrigiert!

2) MSG:

Dehnung: $\varepsilon_{ges} = \alpha_T \Delta T + \frac{\sigma}{E}$

Stoff 1

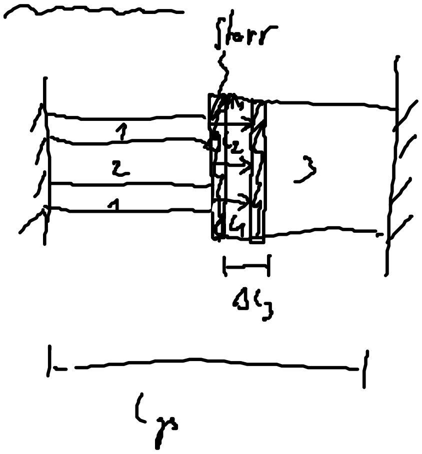
$$\underline{\varepsilon_1} = \underbrace{\cancel{\alpha_T}}_{=0} \Delta T + \frac{\sigma_1}{E_1} \qquad (2)$$

6 Unbekannte, 4 Gleichungen

$$\underline{\varepsilon_2} = \underbrace{\cancel{\alpha_T}}_{=0} \Delta T + \frac{\sigma_2}{E_2} \qquad (3)$$

$$\underline{\varepsilon_3} = \alpha_T \Delta T + \frac{\sigma_3}{E_3} \qquad (4)$$

3) Kinematik



$\Delta l_1 = \Delta l_2$ (5) starre Platte => Verschiebung gleich an 1,2!

$\Delta l_1 + \Delta l_3 = 0$ (6) starre Wände => Längenänderung insgesamt Null!

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = -\Delta l_3$$

4) Auflösen:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = \varepsilon l \Rightarrow \varepsilon_1 l_1 = -\varepsilon_3 l_3 \qquad (5)'$$

$$\varepsilon_2 l_2 = -\varepsilon_3 l_3 \qquad (6)'$$

(2), (3), (4) in

$$\frac{\sigma_1}{\cancel{E_1}} \cancel{l_1} = -\frac{E_1}{l_1}\left(\alpha_T \Delta T + \frac{\sigma_3}{E_3}\right) l_3 \qquad (5)'$$

$$\frac{\sigma_2}{\cancel{E_2}} \cancel{l_2} = \frac{E_2}{l_2}\left(\alpha_T \Delta T + \frac{\sigma_3}{E_3}\right) l_3 \qquad (6)'$$

$$\sigma_3 A_3 = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 \qquad (1)'$$

(5)', (6)' in (1)'

$$\underline{\sigma_3} A_3 = -A_1 \frac{E_1}{l_1}\left(\alpha_T \Delta T + \frac{\sigma_3}{E_3}\right) l_3 - A_2 \frac{E_2}{l_2}\left(\alpha_T \Delta T + \frac{\sigma_3}{E_3}\right) l_3$$

Auflösen:

$$\sigma_3 \left(A_3 + A_1 \frac{E_1}{l_1}\frac{l_3}{E_3} + A_2 \frac{E_2}{l_2}\frac{l_3}{E_3} \right) = - A_1 \frac{E_1}{l_1} l_3 \alpha_T \Delta T - A_2 \frac{E_2}{l_2} l_3 \alpha_T \Delta T$$

$$\sigma_3 = -\alpha_T \Delta T \frac{A_1 \frac{E_1}{l_1} l_3 + A_2 \frac{E_2}{l_2} l_3}{\left(A_3 + 2 A_1 \frac{E_1}{E_3}\frac{l_3}{l_1} + A_2 \frac{E_2}{E_3}\frac{l_3}{l_2} \right)}$$

$$\sigma_3 = -\alpha_T \Delta T \frac{\frac{l_3}{l_1}\left(E_1 A_1 + E_2 A_2 \right)}{A_3 + \frac{l_3}{l_1}\frac{1}{E_3}\left(E_1 A_1 + E_2 A_2 \right)} = -5.94 \frac{N}{mm^2}$$

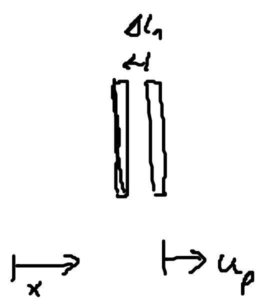
$$\varepsilon = \alpha_T \Delta T + \frac{\sigma_3}{E_3}$$

$$\sigma_1 = -\frac{E_1}{l_1}\left(\alpha_T \Delta T + \frac{\sigma_3}{E_3} \right) l_3 = -3.2 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_2 = -\frac{E_2}{l_2}\left(\alpha_T \Delta T + \frac{\sigma_3}{E_3} \right) l_3 = \sigma_1 \frac{E_2}{l_2}\frac{l_1}{E_1} = \underbrace{\frac{l_1}{l_2}}_{=1}\frac{E_2}{E_1}\sigma_1$$

$$= \frac{2 \cdot 10^5 \, N/mm^2}{2 \cdot 10^4 \, N/mm^2} \sigma_1 = 10 \cdot \sigma_1 = -32 \frac{N}{mm^2}$$

b) Verschiebung u



$$u_p = \Delta l_1 = \varepsilon_1 l_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} \cdot l_1 = \frac{-32 \frac{N}{mm^2}}{10 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}} \cdot 4 \cdot 10^3 \, mm$$

$$u_p = -0.64 \, mm$$