7. Übung – Schnittlasten

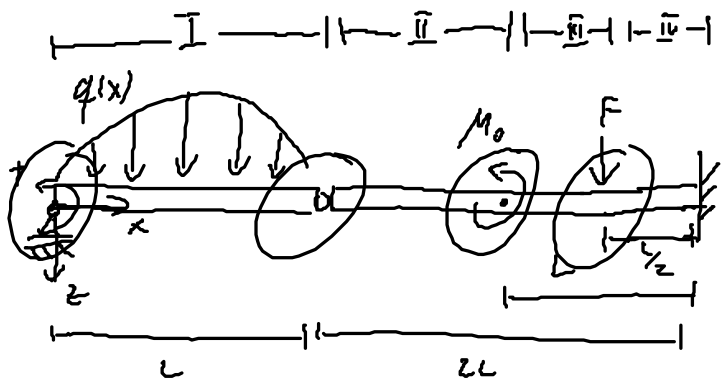
SL-Differentialgleichungen (DGLen)

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \quad \Rightarrow \quad Q(x) = -\int q(x)\,dx + \underline{C_1}$$

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) \quad \Rightarrow \quad M(x) = \int Q(x)\,dx + \underline{C_2}$$

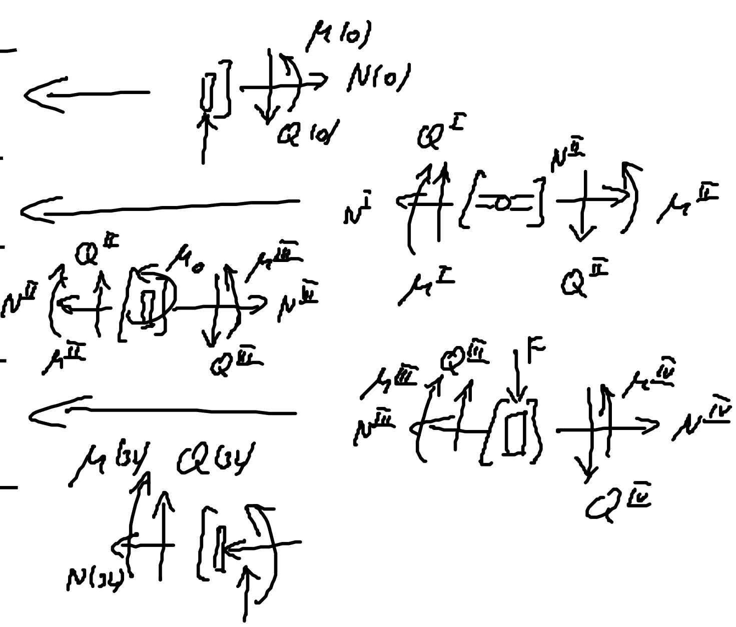
2 Konstanten pro Bereich, aus Randbedingungen / Übergangsbedingungen

Beispiel:



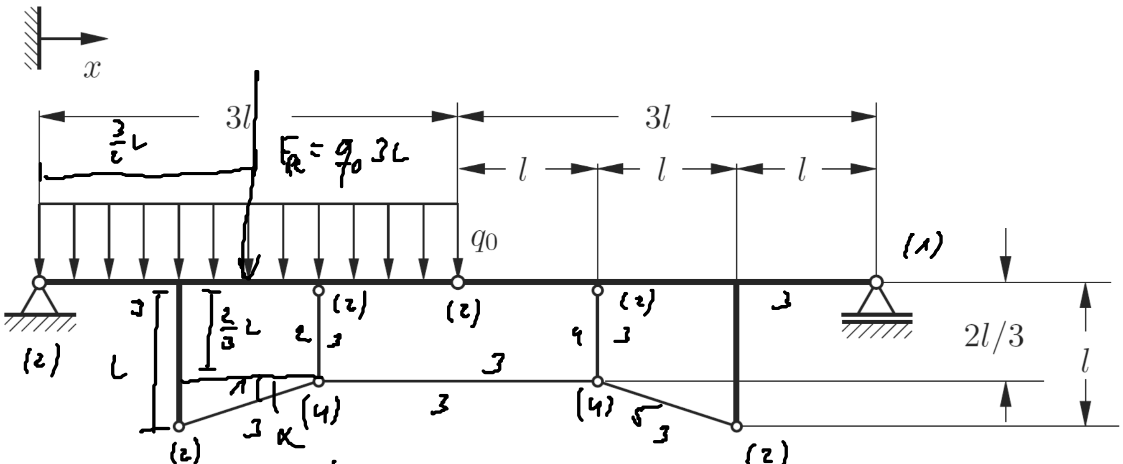
$\Rightarrow$ 8 Konstanten $\Rightarrow$ 8 RBen / ÜBen

x	Q(x)	M(x)
0	–	$M(0) = 0$
L	$Q^{I}(L) = Q^{II}(L)$	$M^{I}(L) = 0$ $M^{II}(L) = 0$
2L	$Q^{II}(2L) = Q^{III}(2L)$	$M^{II}(2L) = M^{III}(2L) + M_0$
$\frac{5}{2}L$	$Q^{III}(\frac{5}{2}L) = Q^{IV}(\frac{5}{2}L) + F$	$M^{III}(\frac{5}{2}L) = M^{IV}(\frac{5}{2}L)$
3L	–	–



Aufgabe 71

71. (a) Berechnen Sie für das skizzierte ebene Tragwerk die Auflagerreaktionen und Stabkräfte
(b) Bestimmen Sie nun die Schnittlasten $M(x)$, $Q(x)$ im Bereich $0 < x < 3l$.
(c) Skizzieren Sie die Schnittgrößen.



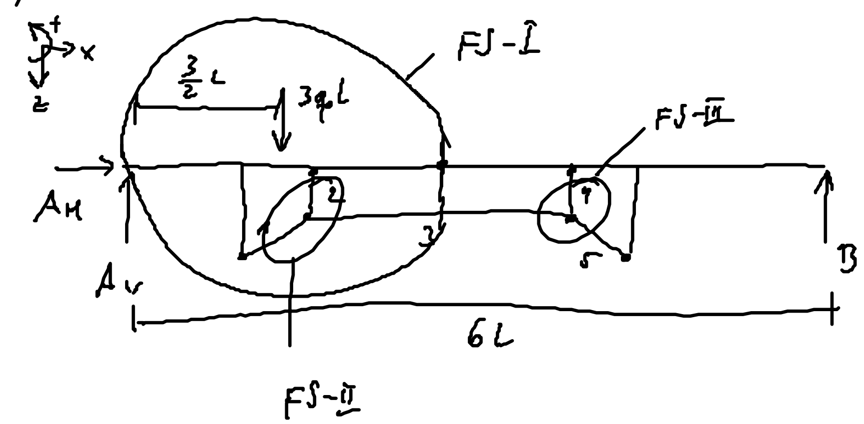
Geg.: q_0, l

Literatur: [1, S. 116-134]

a)

- $h = f - r - v = 21 - 3 - 18 = 0$ ✓
- nicht wackelig / vorspannbar

1) FS als Ganzes:



2) GGB:

$$X: 0 = A_H \Rightarrow A_H = 0$$

$$M^A: 0 = -3q_0 L \tfrac{3}{2}\cancel{L} + B\, 6\cancel{L}$$

$$\Rightarrow B = \frac{9}{2 \cdot 6} q_0 l = \frac{3}{4} q_0 l$$

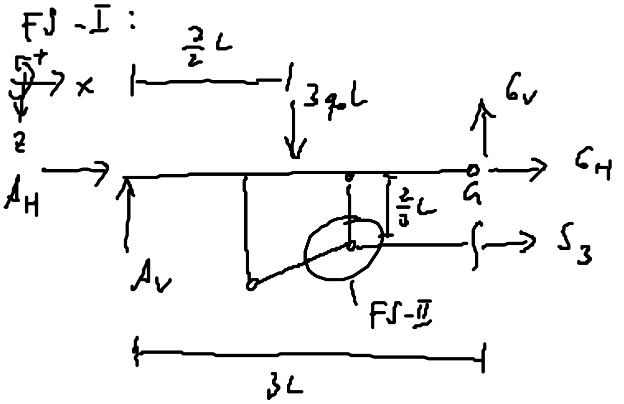
$$z: 0 = -A_v - B + 3q_0 L$$

$$\Rightarrow A_v = 3q_0 l - \frac{3}{4} q_0 l$$

$$= \frac{12-3}{4} q_0 l = \frac{9}{4} q_0 l$$

3) S_i

FS-I:



GGB-I:

$$M^G: 0 = -A_V 3L + 3q_0L\frac{3}{2}L + S_3\frac{2}{3}L$$

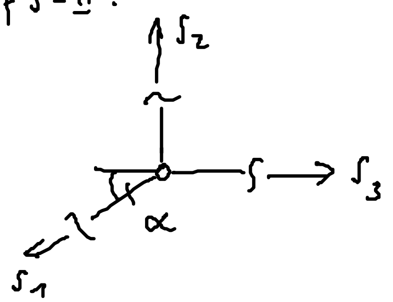
$$\Rightarrow S_3 = \frac{3}{2}\left(A_v 3 - \frac{9}{2}q_0L\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(3\cdot\frac{9}{4}q_0L - \frac{9}{2}q_0L\right)$$

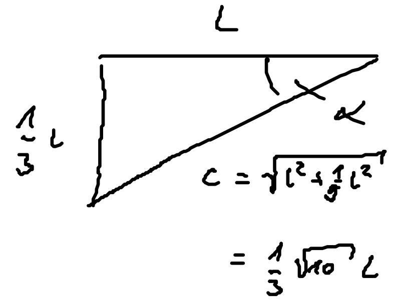
$$A_v = \frac{9}{4}q_0L$$

$$S_3 = \frac{3}{2}\left(\frac{27}{4} - \frac{18}{4}\right)q_0L = \frac{27}{8}q_0L$$

FS-II:



α:



$$c = \sqrt{L^2 + \frac{1}{9}L^2} = \frac{1}{3}\sqrt{10}\,L$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\frac{1}{3}L}{c}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{L}{c} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

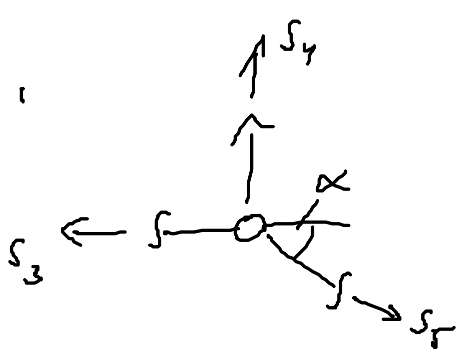
GGB:

$$x: 0 = S_3 - S_1\cos(\alpha) \Rightarrow S_1 = \frac{S_3}{\cos(\alpha)} = \frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{8}q_0L\cdot\frac{\sqrt{10}}{\cancel{3}} = \frac{9}{8}\sqrt{10}\,q_0L$$

$$z: 0 = -S_2 + S_1\sin(\alpha) \Rightarrow S_2 = S_1\sin(\alpha) = \frac{9}{8}\cancel{\sqrt{10}}\,q_0L\frac{1}{\cancel{\sqrt{10}}}$$

$$S_2 = \frac{9}{8}q_0L$$

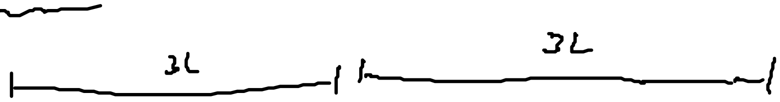
FS-III:



$$\Rightarrow S_4 = S_2$$

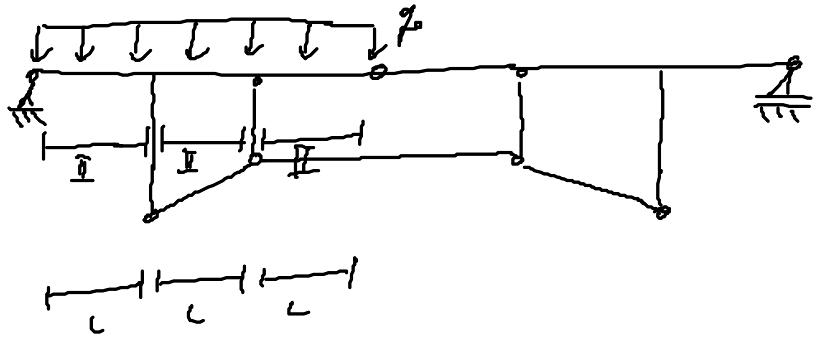
$$\Rightarrow S_5 = S_1$$

b) ges: $Q(x)$, $M(x)$ im Bereich $0 < x < 3L$



$\Rightarrow$ 3 Bereiche, da

Unstetigkeiten auftreten



I) $0 \le x < L$:

$$Q^{I} = -\int q(x)\,dx + C_1 = -q_0 x + \underline{C_1}$$

$$M^{I} = \int Q(x)\,dx + C_1 = \int (-q_0 x + C_1)\,dx + \underline{C_2}$$

$$= -\frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2$$

II) $L \le x < 2L$:

$$Q^{II} = -q_0 x + \underline{C_3}$$

$$M^{II} = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + C_3 x + \underline{C_4}$$

6 Konstanten

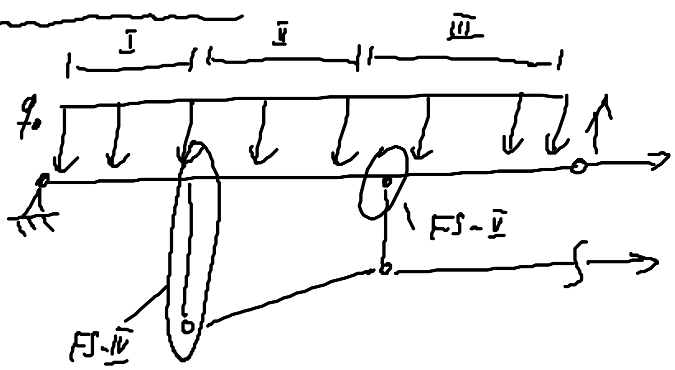
III) $2L \le x < 3L$:

= 2 pro Bereich!

$$Q^{III} = -q_0 x + \underline{C_5}$$

$$M^{III} = -\frac{1}{2} q_0 x^2 + C_5 x + \underline{C_6}$$

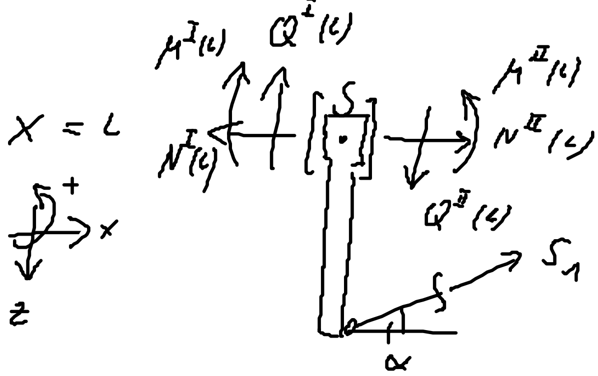
RBn / ÜBn:



RBn: $M^{I}(x=0) = 0$ RB-1

$M^{III}(x = 3l) = 0$ RB-2

FS-IV: $x = l$



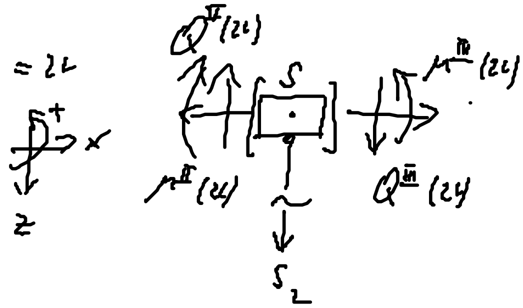
ÜB-1

$$z:\ 0 = -Q^{I}(l) + Q^{II}(l) - S_1 \sin(\alpha) \Rightarrow Q^{II}(l) = Q^{I}(l) + S_1 \sin(\alpha)$$

ÜB-2

$$M^{l}:\ 0 = -M^{I}(l) + M^{II}(l) + S_1 \cos(\alpha)\, l \Rightarrow M^{I}(l) = M^{II}(l) + S_1 \cos(\alpha)\, l$$

FS-II: $x = 2l$



ÜB-3

$$z:\ 0 = -Q^{II}(2l) + Q^{III}(2l) + S_2 \Rightarrow Q^{II}(2l) = Q^{III}(2l) + S_2$$

ÜB-4

$$M^{S}:\ 0 = -M^{II}(2l) + M^{III}(2l) \Rightarrow M^{II}(2l) = M^{III}(2l)$$

... Einsetzen

Ergebnis:

$$Q^{I}(x) = q_0 \left(\frac{9}{4} l - x\right) = q_0 l \left(\frac{9}{4} - \left(\frac{x}{l}\right)\right)$$

$$Q^{II}(x) = q_0 l \left(\frac{27}{8} - \left(\frac{x}{l}\right)\right)$$

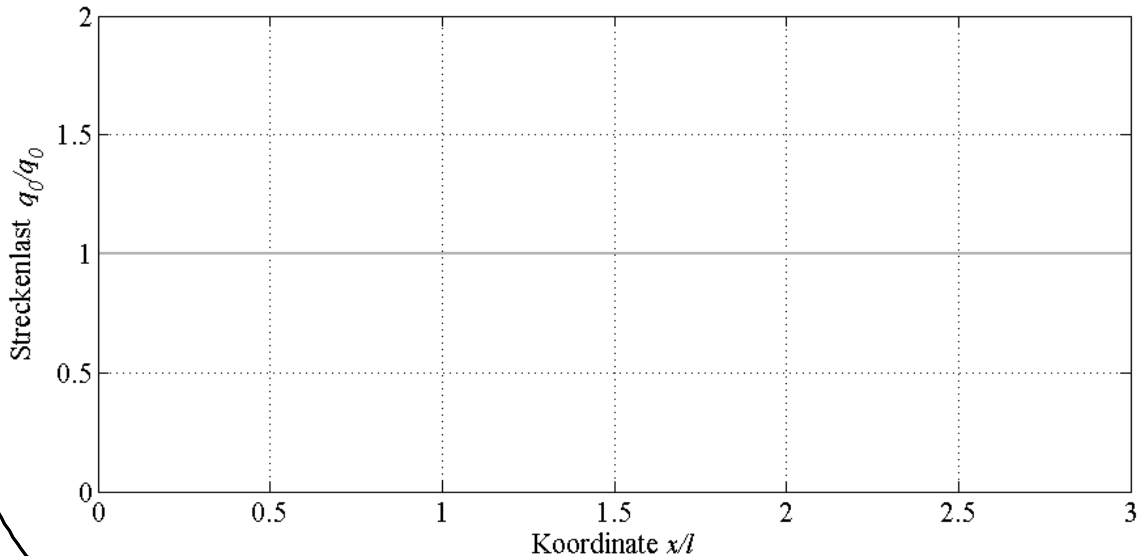
$$Q^{III}(x) = q_0 l \left(\frac{9}{4} - \left(\frac{x}{l}\right)\right)$$

$$M^{I}(x) = q_0 l^2 \left[\frac{9}{4}\left(\frac{x}{l}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

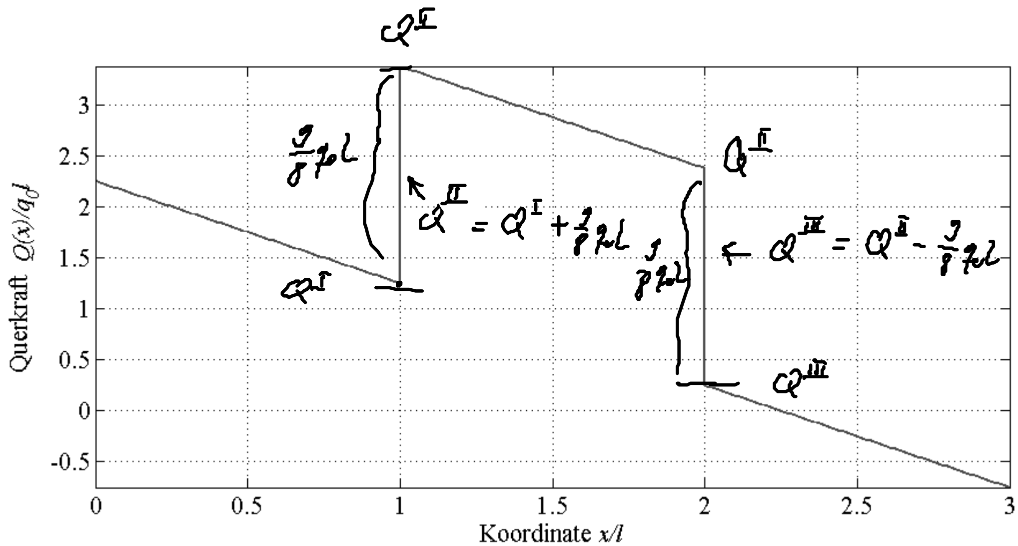
$$M^{II}(x) = q_0 l^2 \left[-\frac{9}{2} + \frac{27}{8}\left(\frac{x}{l}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right]$$

$$M^{III}(x) = q_0 l^2 \left[-\frac{9}{4} + \frac{9}{4}\left(\frac{x}{l}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right]$$

c) Verlauf



$Q' = -q$

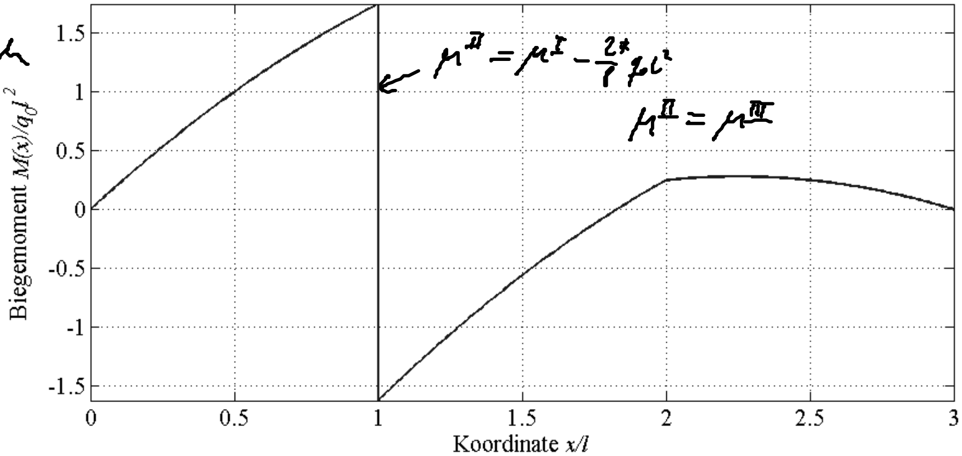


Q ist

- linear
- fällt

$M' = Q$

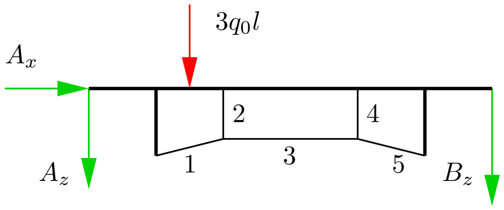
M ist quadratisch



Übung

Aufgabe 71

(a) Das System, bestehend aus zwei Rahmen und fünf Stäben, ist in sich starr.



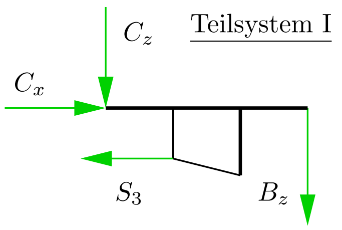
Freischneiden des Gesamtsystems von der Umgebung macht die drei unbekannten Lagerreaktionen sichtbar. Die Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_z = 0$ und $\Sigma M^{(A)} = 0$ liefern

$$0 = A_x$$
$$0 = A_z + 3q_0l + B_z$$
$$0 = -\frac{9}{2}q_0l^2 - 6lB_z$$

und damit die gesuchten Größen

$$A_x = 0 \quad , \quad A_z = -\frac{9}{4}q_0l \quad , \quad B_z = -\frac{3}{4}q_0l \quad .$$

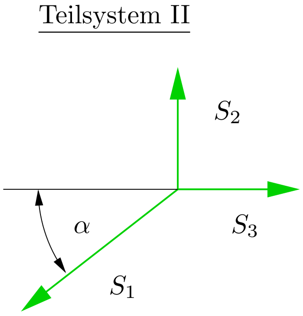
Zur Berechnung der Stabkräfte kann man das System in der Mitte teilen. Dabei muss durch das Gelenk C und den Stab 3 geschnitten werden.

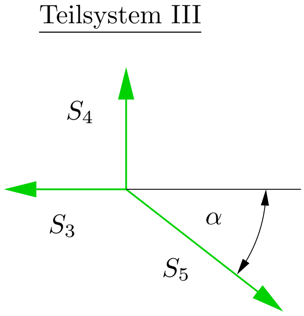


Die Gleichgewichtsbedingung $\Sigma M^{(C)} = 0$ am rechten Teilsystem (TS I) liefert dann

$$0 = \frac{9}{4}q_0l^2 - \frac{2}{3}lS_3 \quad \Rightarrow \quad S_3 = \frac{27}{8}q_0l \; .$$

Freischnitte der beiden Knoten, in denen sich jeweils drei Stäbe treffen, ermöglichen die Berechnung der fehlenden Stabkräfte.





Zunächst wird der Winkel α eingeführt. Aus der Geometrie erkennt man

$$\sin\alpha = \frac{1}{10}\sqrt{10} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{3}{10}\sqrt{10} \quad .$$

Am linken Knoten (Teilsystem II) ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht

$$0 = S_3 - S_1\cos\alpha$$
$$0 = -S_2 + S_1\sin\alpha$$

und damit

$$S_1 = \frac{9}{8}\sqrt{10}q_0l \quad , \quad S_2 = \frac{9}{8}q_0l \quad .$$

Analog verfährt man am rechten Knoten (Teilsystem III) und erhält

$$S_5 = \frac{9}{8}\sqrt{10}q_0l \quad , \quad S_4 = \frac{9}{8}q_0l \quad .$$

(b) Die Querkraft $Q(x)$ und das Biegemoment $M(x)$ sollen mittels der Schnittlastendifferentialgleichungen

$$\frac{dM}{dx} = Q \quad , \quad \frac{dQ}{dx} = -q \tag{1}$$

bestimmt werden. Laut Aufgabenstellung sollen die Schnittlasten nur im Bereich $0 < x < 3l$ bestimmt werden. Bei $x = l$ werden durch den angeschweißten Querträger ein Moment und eine Kraft eingeleitet. Bei $x = 2l$ wird durch den gelenkig angebundenen Stab eine Kraft in den horizontalen Träger eingeleitet. Somit muss der untersuchte Abschnitt in drei Bereiche eingeteilt werden.

Bereich	x-Koordinate	Biegemoment	Querkraft
1	$0 < x < l$	M_1	Q_1
2	$l < x < 2l$	M_2	Q_2
3	$2l < x < 3l$	M_3	Q_3

Im gesamten untersuchten Bereich gilt

$$q(x) = q_0 \; .$$

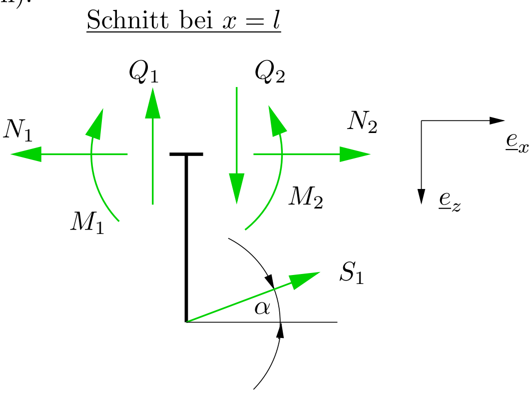
Integration der Differentialgleichungen (1) liefert

$$M_1 = -\frac{1}{2}q_0x^2 + a_1x + a_2 \tag{2a}$$
$$M_2 = -\frac{1}{2}q_0x^2 + b_1x + b_2 \tag{2b}$$
$$M_3 = -\frac{1}{2}q_0x^2 + c_1x + c_2 \quad . \tag{2c}$$

Zur Bestimmung der sechs Unbekannten benötigt man sechs Rand- und Übergangsbedingungen. Am linken Rand ($x = 0$) ist das Moment Null

$$0 = M_1(0) \quad . \tag{3}$$

Bei $x = l$ können die Übergangsbedingungen nur mit Hilfe eines Freischnittes formuliert werden. Dabei ist besondere Sorgfalt bei den Vorzeichen angebracht (Schnittuferkonvention).

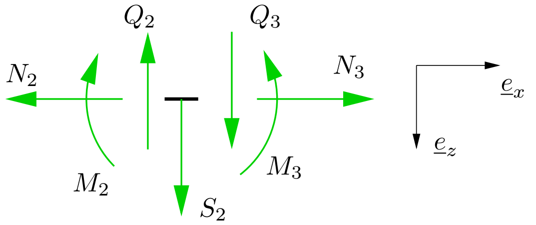


Kräfte- und Momentengleichgewicht liefert die folgenden Beziehungen

$$0 = -Q_1(l) + Q_2(l) - S_1 \sin\alpha \tag{4}$$
$$0 = -M_1(l) + M_2(l) + lS_1 \cos\alpha \quad . \tag{5}$$

Bei $x = 2l$ muss man wiederum einen Freischnitt zu Rate ziehen.

Schnitt bei $x = 2l$



$$0 = -Q_2(2l) + Q_3(2l) + S_2 \tag{6}$$
$$0 = -M_2(2l) + M_3(2l) \quad . \tag{7}$$

Schließlich erkennt man bei $x = 3l$ ein Gelenk und fordert

$$0 = M_3(3l) \quad . \tag{8}$$

Einsetzen von (2) in die Randbedingungen (3) bis (8) liefert nach einiger Rechnung[1]

$$a_1 = \frac{9}{4}q_0 l \quad , \quad a_2 = 0 \quad ,$$
$$b_1 = \frac{27}{8}q_0 l \quad , \quad b_2 = -\frac{9}{2}q_0 l^2 \quad ,$$
$$c_1 = \frac{9}{4}q_0 l \quad , \quad c_2 = -\frac{9}{4}q_0 l^2 \quad .$$

Einsetzen ergibt schließlich für das Biegemoment

$$M_1 = q_0 l^2 \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{9}{4}\frac{x}{l} \right]$$
$$M_2 = q_0 l^2 \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{27}{8}\frac{x}{l} - \frac{9}{2} \right]$$
$$M_3 = q_0 l^2 \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{9}{4}\frac{x}{l} - \frac{9}{4} \right]$$

und die Querkraft

$$Q_1 = q_0 l \left[-\frac{x}{l} + \frac{9}{4} \right] = Q_3$$
$$Q_2 = q_0 l \left[-\frac{x}{l} + \frac{27}{8} \right] \quad .$$

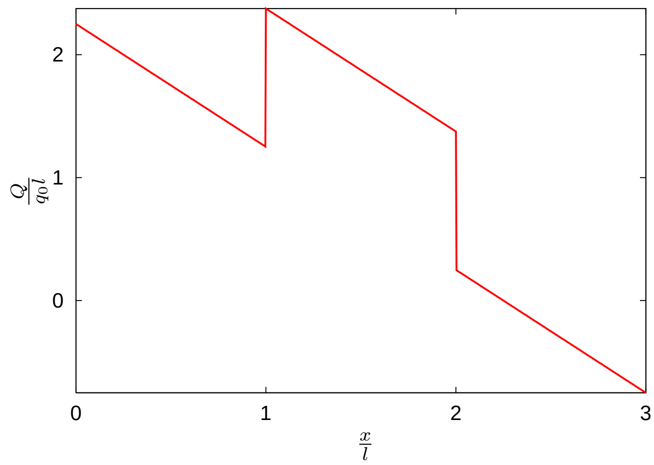
In vielen Anwendungen ist die Kenntnis des Biegemomentes entscheidend. Der Vollständigkeit wegen soll schließlich auch der Normalkraftverlauf berechnet werden. Da es hier keine Streckenlast in Balkenlängsrichtung gibt ($n(x) = 0$), muss die Normalkraft abschnittsweise konstant sein. Ein Freischnitt des linken Lagers A liefert mit $A_x = 0$ für die Normalkraft im Bereich $0 < x < l$ das Ergebnis $N_1(x) = 0$. Der Schnitt bei $x = l$ liefert zusammen mit einem Kräftegleichgewicht in x-Richtung $N_2(x) = -\frac{27}{8}ql$. Der Schnitt bei $x = 2l$ gibt zudem $N_3(x) = N_2(x)$.

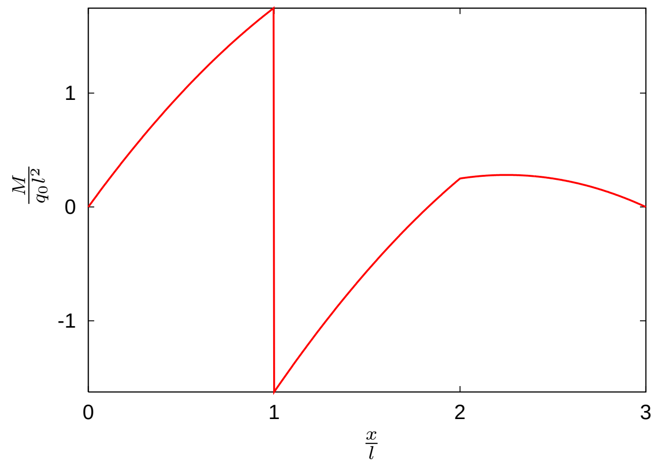
[1]Das ist der Moment, wo man spätestens zu Stift und Papier greifen sollte.

(c) charakteristische Werte

$$M_1(l) = \frac{7}{4}q_0 l^2$$
$$M_2(l) = -\frac{13}{8}q_0 l^2$$
$$M_2(2l) = \frac{1}{4}q_0 l^2 = M_3(2l)$$
$$Q_1(0) = \frac{9}{4}q_0 l$$
$$Q_1(l) = \frac{5}{4}q_0 l$$
$$Q_2(l) = \frac{19}{8}q_0 l$$
$$Q_2(2l) = \frac{11}{8}q_0 l$$
$$Q_3(2l) = \frac{1}{4}q_0 l$$
$$Q_3(3l) = -\frac{3}{4}q_0 l$$

Die Bilder zeigen die Verläufe für die Querkraft und das Biegemoment.

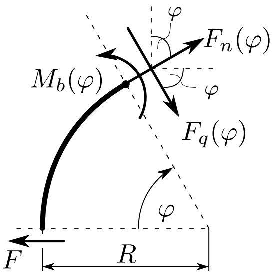




Aufgabe 74

(a)

Freischnitt



Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum F_H = -F + \sin(\varphi)F_n(\varphi) + \cos(\varphi)F_q(\varphi) \stackrel{!}{=} 0 \qquad (9)$$

$$\sum F_V = \cos(\varphi)F_n(\varphi) - \sin(\varphi)F_q(\varphi) \stackrel{!}{=} 0 \qquad (10)$$

$$\sum M^{(S)} = M_b(\varphi) - F\sin(\varphi)R \stackrel{!}{=} 0 \qquad (11)$$

$$(10) \Rightarrow \qquad F_n(\varphi) = \tan(\varphi)F_q(\varphi) \qquad (12)$$

$$(9) \Rightarrow \qquad F_q(\varphi)\left(\underbrace{\frac{\sin^2(\varphi)}{\cos(\varphi)} + \cos(\varphi)}_{\frac{1}{\cos(\varphi)}}\right) = F \qquad (13)$$

$$\Rightarrow \qquad F_q(\varphi) = \cos(\varphi)F \qquad (14)$$

$$F_n(\varphi) = \sin(\varphi)F \qquad (15)$$

$$(11) \Rightarrow \qquad M_b(\varphi) = R\sin(\varphi)F \qquad (16)$$

(b)

φ	$F_n(\varphi)$	$F_q(\varphi)$	$M_b(\varphi)$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}F$	$\frac{\sqrt{2}}{2}F$	$\frac{\sqrt{2}}{2}FR$
90°	F	0	RF