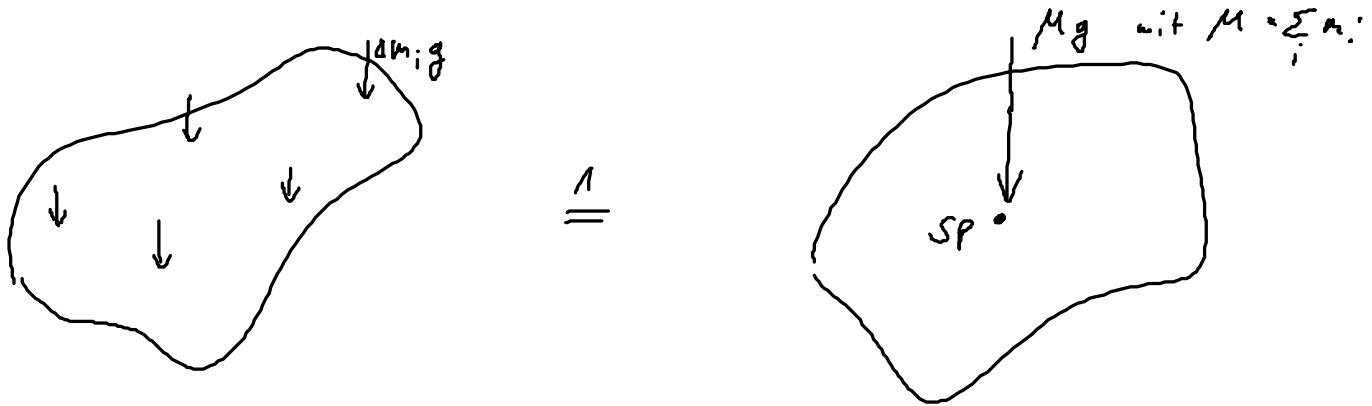


3. Übung - Schwerpunkt

1)



SP: Punkt in dem man sich das eigentlich räumlich verteilte Gewicht konzentriert denken kann!

2)

$$x_s = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i} \quad , \quad \vec{r}_s = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{\sum_i m_i}$$

Einzel-SP;
Einzelmassen

Gesamt-SP

3)

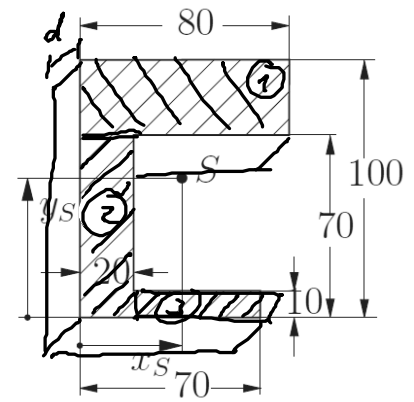
Kraft - SP: $x_s = \frac{\sum_i x_i f_i}{\sum_i f_i} \Rightarrow x_s = \frac{\int x f(x) dx}{\int f(x) dx}$

Flächen - SP: $x_s = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i} \Rightarrow x_s = \frac{\int x dA}{\int dA}$

Aufgabe 20

20. Es sind die Schwerpunktabstände x_S und y_S des nebenstehend skizzierten Blechteiles zu bestimmen.
(Dicke $d = 3\text{mm}$)

hierbei $\rho = \text{const.}$



ges: Schwerpunkt

Massen-SP:
$$x_S^M = \frac{\sum x_i \cdot m_i}{\sum m_i} \quad \text{mit: } m_i = \rho V_i = \rho \cdot D \cdot A_i$$

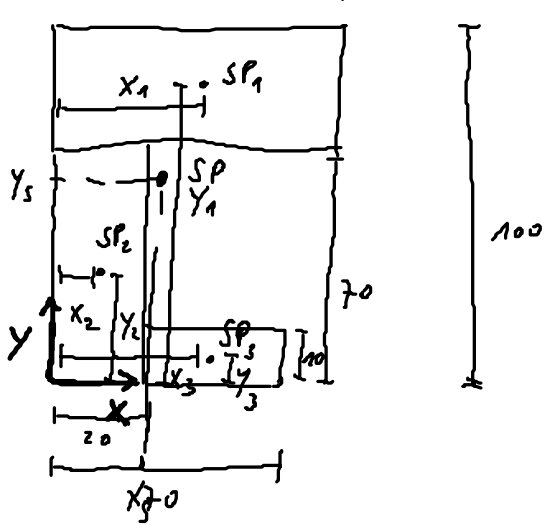
Flächen-SP:
$$x_S^A = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} \Rightarrow \text{hier } x_S^M = x_S^A$$

Lösung mit Tabellenverfahren

1) Teile Körper in bekannte Teilstücke

2) Tabelle

i	A_i [mm ²]	x_i [mm]	y_i [mm]	$x_i A_i$ [mm ³]	$y_i A_i$ [mm ³]
1	+2400	40	15 + 70 = 85	2400 · 40 = 96.000	85 · 2400 = 204.000
2	+1400	10	35	10 · 1400 = 14.000	35 · 1400 = 49.000
3	+500	25 + 20 = 45	5	45 · 500 = 22.500	5 · 500 = 2.500
Σ	=4300 80	—	—	=132.500	=255.500



$$A_1 = (80 \cdot 30) \text{ mm}^2$$

$$A_2 = (20 \cdot 70) \text{ mm}^2$$

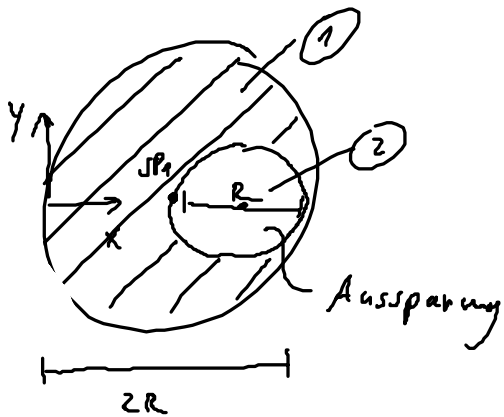
$$A_3 = (50 \cdot 10) \text{ mm}^2$$

damit

$$x_s = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{132.500 \text{ mm}^3}{4300 \text{ mm}^2} = 30,81 \text{ mm}$$

$$y_s = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{255.500 \text{ mm}^3}{4300 \text{ mm}^2} = 59,42 \text{ mm}$$

Zusatzaufgabe



geg: $R, s = \text{const.}, D = \text{const.}$

gev: $x_s \Rightarrow$ lös mit Tabellenverfahren!

$$x_1 = \frac{2R}{2} = R$$

$$x_2 = \frac{R}{2} + R = \frac{3}{2}R$$

1) Auftrieb

$$2) x_s = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i}$$

i	A_i	x_i	$x_i A_i$
1	πR^2	R	πR^3
2	$-\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2$	$\frac{3}{2}R$	$-\pi \frac{1}{4} R^2 \frac{3}{2} R = -\frac{3\pi}{8} R^3$
Σ	$\pi R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2$		$\pi R^3 - \frac{3\pi}{8} R^3$

$$= \frac{3}{4} \pi R^2$$

$$= \pi R^3 \left(\frac{8}{8} - \frac{3}{8} \right) = \underline{\underline{\frac{5}{8} \pi R^3}}$$

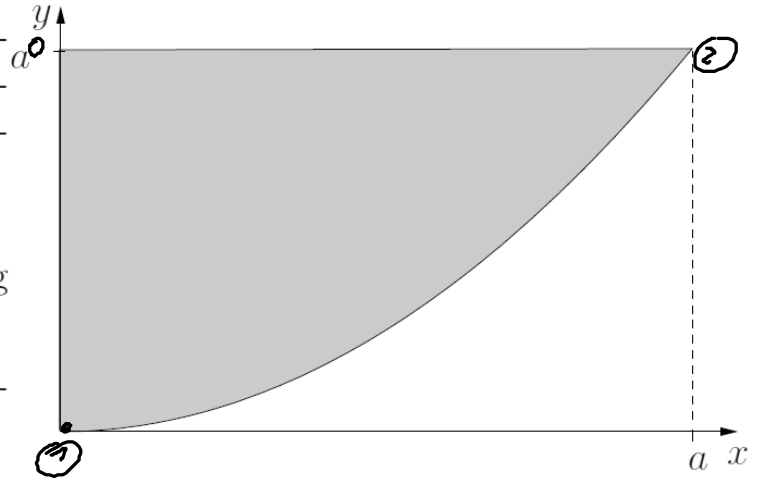
$$\Rightarrow x_s = \frac{\frac{5}{8} \pi R^2}{\frac{3}{4} \pi R^2} = \frac{5}{6} R$$

$$\frac{5 \cdot 4}{28 \cdot 3}$$

Aufgabe 25

25. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts der Fläche, die durch den Graphen der Parabel, die y -Achse und die Linie $y = a$ begrenzt wird (s. Skizze).

- Stellen Sie die Funktionsgleichung der Parabel auf.
- Berechnen Sie alle notwendigen Integrale.



Geg.: a

a) ges: $y(x)$

$$y(x) = Ax^2 + 0x + c \Rightarrow y = \frac{1}{a} x^2$$

$$\textcircled{1} y(x=0) = \frac{1}{a} 0^2 = 0 \quad \checkmark$$

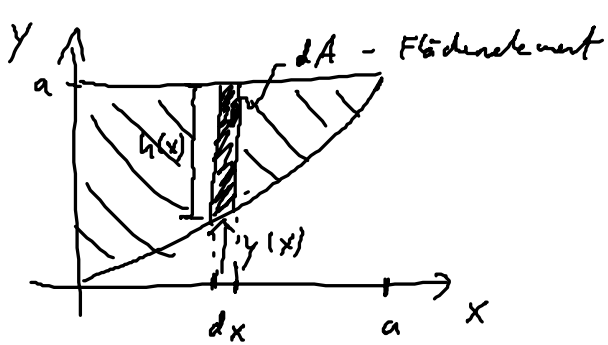
$$\textcircled{2} y(x=a) = \frac{1}{a} a^2 = a \quad \checkmark$$

b) ges: Flächen-SP

$$x_s = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} \Rightarrow x_s = \frac{\int x dA}{\int dA}$$

$$y_s = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} \Rightarrow y_s = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

i) x_s



$$A = b \times h = \text{Breite} \times \text{Höhe}$$

$$\left. \begin{aligned} dA &= h(x) dx \\ h(x) &= a - y(x) \end{aligned} \right\} dA = (a - y(x)) dx$$

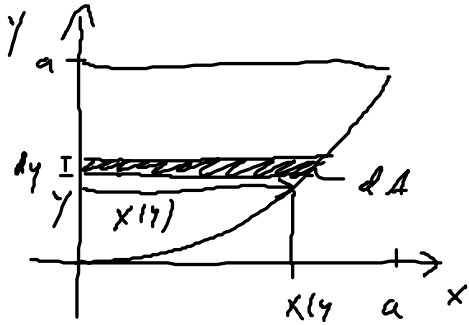
$$\Rightarrow x_s = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int_0^a x (a - \frac{1}{2} x^2) dx}{\int_0^a (a - \frac{1}{2} x^2) dx} = \frac{\int_0^a (x a - \frac{1}{2} x^3) dx}{\int_0^a (a - \frac{1}{2} x^2) dx}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{2} a x^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{2} x^4 \right]_0^a}{\left[a x - \frac{1}{3} \frac{1}{2} x^3 \right]_0^a} = \frac{\left(\frac{1}{2} a^3 - \frac{1}{4} \frac{1}{2} \cdot a^4 \right) - 0}{\left(a^2 - \frac{1}{3} \frac{1}{2} a^3 \right) - 0}$$

$$= \frac{a^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right)}{a^2 \left(1 - \frac{1}{6} \right)} = \left(\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{\frac{5}{6}} \right) a = \frac{3}{8} a$$

ii) y_s

$$y_s = \frac{\int y dA}{\int dA}$$



$$dA = x(y) dy$$

$$y = \frac{1}{a} x^2 \Rightarrow x = \sqrt{ay}$$

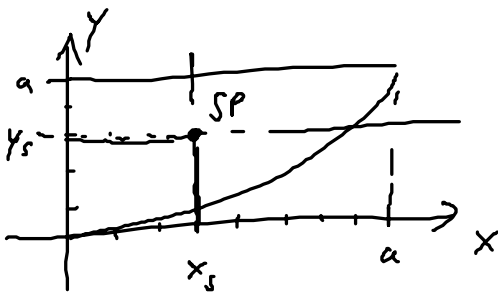
$$dA = \sqrt{ay} dy$$

$$\Rightarrow \bar{y}_s = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^a y \sqrt{ay} dy}{\int_0^a \sqrt{ay} dy} = \frac{\int_0^a \sqrt{a} y \sqrt{y} dy}{\int_0^a \sqrt{a} \sqrt{y} dy}$$

$$= \frac{\int_0^a y \cdot y^{\frac{1}{2}} dy}{\int_0^a y^{\frac{1}{2}} dy} = \frac{\int_0^a y^{\frac{3}{2}} dy}{\int_0^a y^{\frac{1}{2}} dy} = \frac{\left[\frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^a}{\left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^a}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} a^{\frac{5}{2}} - 0}{\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} - 0} = \frac{6}{10} \frac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5} a = a \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{5} \right) = a$$

iii) Skizze



Tut: 22a), 29 ; Mai 22b), 24, 28