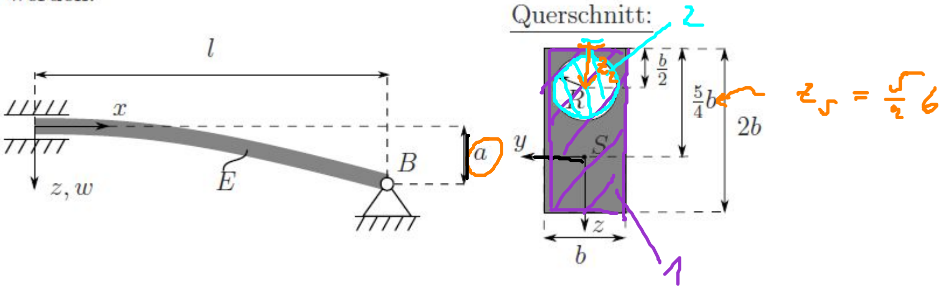
14. Übung

1. Ein Träger (Länge l, E-Modul E und skizzierter Querschnitt) soll wie dargestellt gelagert sein. Durch Einbaufehler (Vorspannung) ist das Lager an der Stelle B um a abgesenkt. Im Folgenden sollen die Auswirkungen des Einbaufehlers auf das Bauteil bestimmt werden.



(a) Bestimmen Sie das axiale Flächenträgheitsmoment I_y des rechteckigen Profils (Breite b, Höhe $2b$) mit kreisförmiger Aussparung (Radius $R = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}b$) bezüglich des eingezeichneten Schwerpunktkoordinatensystems.

Hinweis: Benutzen Sie für die Rechnungen in (b)-(e) als Abschätzung:

$$\boxed{I_y = \frac{1}{3}b^4}.$$

(b) Bestimmen Sie die Absenkung des Balkens $w(x)$.

(c) Wie groß ist die Lagerkraft in z-Richtung in B?

(d) Wo tritt die maximale Zug-, und wo die maximale Druckspannung auf?

(e) Wie groß darf a höchstens sein, damit die zulässige Zugspannung σ_{zul} nicht überschritten wird?

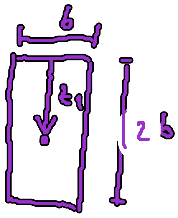
Geg.: l, E, a, $R = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}b$, b, σ_{zul}

a) $I_{yy} = \sum\limits_i I_{yy_i} + \underbrace{\sum\limits_i z_{s_i}^2 A_i}_{\text{Steiner-Anteil}}$ $\Rightarrow$ Tabellenverfahren

i	A_i	z_i	$z_{s_i} = \lvert \overset{SP_{ges}}{z_s} - \overset{SP_i}{z_i} \rvert$	$z_{s_i}^2 A_i$	I_{yy_i}
1	$2b^2$	b	$\lvert \frac{5}{4}b - \frac{4}{4}b \rvert = \frac{1}{4}b$	$\frac{1}{16}b^2 \cdot 2b^2 = \frac{1}{8}b^4$	$\frac{2}{3}b^4$
2	$-\pi R^2 = \cancel{\pi}\frac{2}{3\cancel{\pi}}b^2$	$\frac{b}{2}$	$\lvert \frac{5}{4}b - \frac{2}{4}b \rvert = \frac{3}{4}b$	$\frac{9}{16}b^2 \cdot \frac{2}{3}b^2 = -\frac{3}{8}b^4$	$-\frac{1}{3\pi}b^4$

* A_2 ist Bohrung

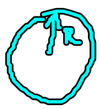
a) 1)



$z_S = \frac{5}{4} b$ – Gesamtschwerpunkt

$$I_{yy1} = \frac{1}{12} B H^3 = \frac{1}{12} b (2b)^3 = \frac{8}{12} b^4 = \frac{2}{3} b^4$$

2)



$R = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\, b$

$$I_{yy2} = -\frac{\pi}{4} R^4 = -\frac{\pi}{4} \left(\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{1/2} b \right)^4 = -\frac{\pi}{\cancel{4}} \frac{\cancel{4}}{3^2 \pi^2} b^4 = -\frac{1}{9\pi} b^4$$

$\Longrightarrow$ Lösung: $I_{yy} = \frac{2}{3} b^4 - \frac{1}{9\pi} b^4 + \frac{1}{8} b^4 - \frac{3}{8} b^4 = \frac{5}{12} b^4 - \frac{1}{9\pi} b^4$ //

b) ges: $w(x)$

$$(EI w'')'' = q(x)$$
$$EI w^{IV} = 0$$
$$EI w''' = C_1$$
$$EI w'' = C_1 x + C_2$$
$$EI w' = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + \cancel{C_3}$$
$$EI w = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + \cancel{C_3} x + \cancel{C_4}$$

RBn:

$w(x = L) = a$ (1)

$w(x = 0) = 0$ (2)

$M(x = L) = 0$ (3) $\Rightarrow -EI w''(L) = 0$

$w'(x = 0) = 0$ (4)

(2): $0 = C_4 \Rightarrow C_4 = 0$

(4): $0 = C_3 \Rightarrow C_3 = 0$

(1): $EI \cdot a = \frac{1}{6} C_1 L^3 + \frac{1}{2} C_2 L^2 \Rightarrow EIa = \frac{1}{6} C_1 L^3 - \frac{1}{2} C_1 L^3 = -\frac{1}{3} C_1 L^3$

(3): $0 = C_1 L + C_2 \Rightarrow C_2 = -C_1 L$

$\Rightarrow C_1 = -\frac{3EIa}{L^3}$, $C_2 = \frac{3EIa}{L^2}$

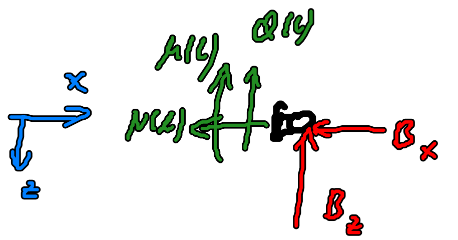
Damit:

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2\right) = \frac{1}{\cancel{EI}}\left(-\frac{3\cancel{EI}a}{6\,l^3}x^3 + \frac{3\cancel{EI}a}{2\,l^2}x^2\right)$$

$$w(x) = -\frac{1}{2}\frac{a}{l^3}x^3 + \frac{3}{2}\frac{a}{l^2}x^2$$

c) Kraft in B:

FJ bei $x = l$:

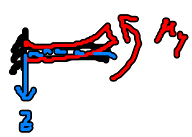


GGW:

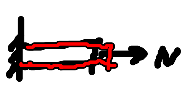
$$z:\ 0 = -B_z - Q(l) \Rightarrow B_z = -Q(l) = -\left(-EI\,w'''(l)\right) = C_1 = -\frac{3EIa}{l^3}$$

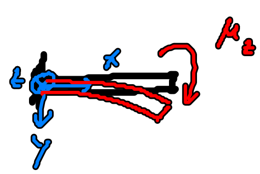
$$\text{mit } I_y = \frac{1}{3}b^4 \Rightarrow B_z = -\frac{\cancel{3}Ea}{l^3}\,\frac{1}{\cancel{3}}b^4 = -\frac{Eab^4}{l^3}$$

d) σ_{max}:



$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y$$





hier: $\sigma = \frac{M_y^{(a)}}{I_y}z^{(b)}$

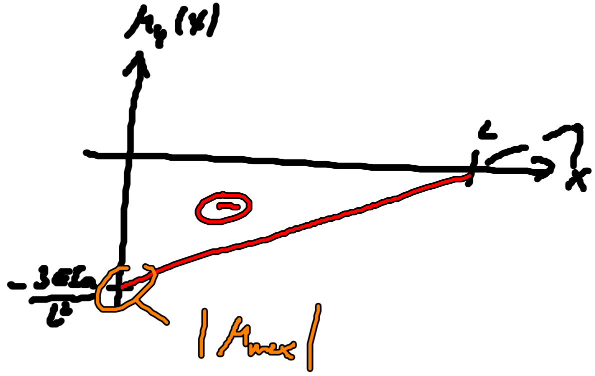
(a) Wo ist M_y maximal

(b) Wo ist z maximal $\Rightarrow$ Randfasern

(a)

$$\text{mit: } M_y = -EI\,w''(x) = -\left(C_1 x + C_2\right) = \frac{3EIa}{l^3}x - \frac{3EIa}{l^2}$$

Verlauf:

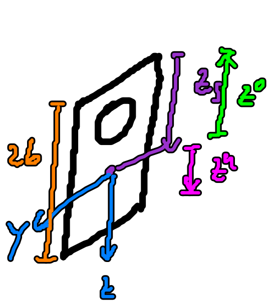


$M(0) = -\frac{3EIa}{l^2}$

$M(l) = 0$

$\Rightarrow$ maximales Moment $|M_{max}|$ bei $x = 0$

(2)



Randfaser: oben: $z^o = -z_s = -\frac{5}{4}b$

unten: $z^u = 2b - z_s = \frac{8}{4}b - \frac{5}{4}b = \frac{3}{4}b$

damit: $\sigma_{max} = -\frac{3E\cancel{I}a}{l^2\cancel{I}} \cdot z^{o/u}$

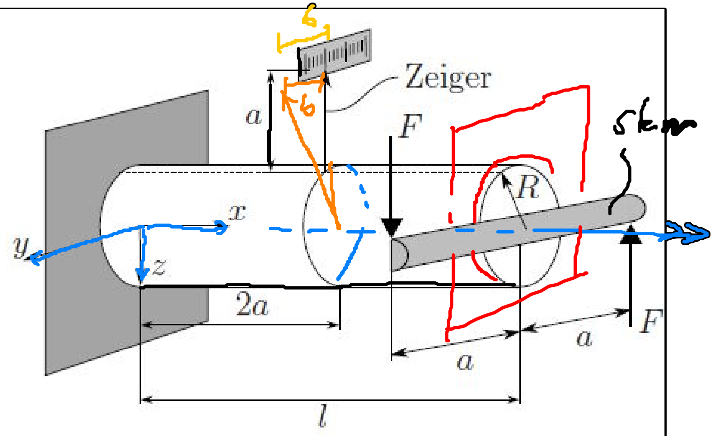
$\Rightarrow \sigma^D_{max} = -\frac{3Ea}{l^2} \cdot z^u = -\frac{3Ea}{l^2} \cdot \frac{3}{4}b = -\frac{9Eab}{l^2}$

$\Rightarrow \sigma^Z_{max} = -\frac{3Ea}{l^2} \cdot z^o = \frac{3Ea}{l^2} \cdot \frac{5}{4}b = \frac{15Eab}{l^2}$

Ergebnis: Maximale Zugspannung bei $x = 0$, $z = -\frac{5}{4}b$

Maximale Druckspannung bei $x = 0$, $z = \frac{3}{4}b$

2. Eine Vorrichtung zur Messung des Schubmoduls G ist wie dargestellt aufgebaut. An eine vollzylindrische Welle (Radius R, Länge l), welche links fest eingespannt ist, ist am rechten Ende eine starre Stange (Länge $2a$) mittig befestigt. Diese wird an jedem Ende mit einer Kraft F belastet. An der Position $x = 2a$ ist eine Ablesevorrichtung in Form eines Zeigers der Länge a montiert, die anzeigt wie weit sich der Zeigestab aufgrund der Torsion der Welle verschiebt. Vorrausgesetzt seien kleine Verformungen der Welle.



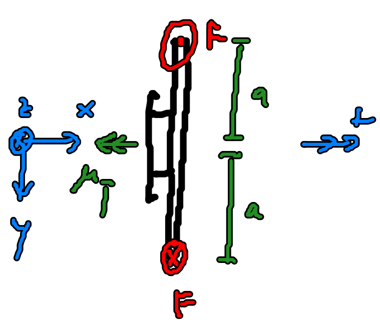
(a) Bei Torsion der Welle zeigt die Ablesevorrichtung eine Verschiebung b in Richtung des positiven Verdrehwinkels an. Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen F und dem Abstand b auf. Wie kann daraus der Schubmodul G bestimmt werden?

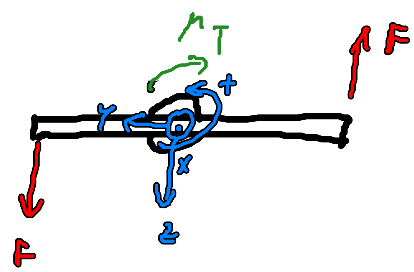
(b) Um Gewicht zu sparen soll die Welle als Hohlwelle mit identischem Außenradius R gefertigt werden. Wie groß muss der Innenradius R_i gewählt werden um eine Gewichtseinsparung von 25% zu erzielen? Welches Verhältnis ergibt sich dann für die polaren Flächenträgheitsmomente $I_{p,voll}/I_{p,hohl}$?

Geg.: l, a, R, b, F

a) Torsion: $M_T = G I_p \theta' = G I_p \frac{d\theta}{dx}$ ~ MSG für Torsion

1) FS:





GGB:

$M_x^S: 0 = -M_T + Fa + Fa$

$\Rightarrow M_T = 2Fa$ (1)

2) MSG: $M_T = G I_p \frac{d\theta}{dx}$ (2)

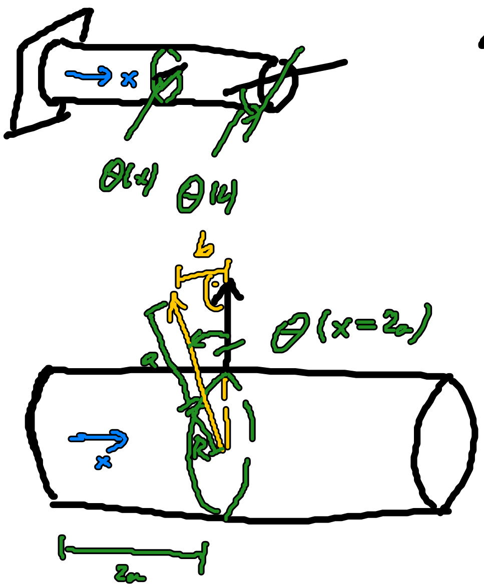
$\Rightarrow$ (1): $2Fa = G I_p \frac{d\theta}{dx}$ $\quad \Big| \cdot dx, \ \frac{1}{G I_p}$

$\frac{2Fa}{G I_p} dx = d\theta$ $\quad \Big| \int (\dots)$

$\theta(x) = \int \frac{2Fa}{G I_p} dx = \frac{2Fa}{G I_p} \cdot x + C_1$ (3)

3) Kinematik:

RB für $\theta(x)$: $\theta(x=0)=0 \Rightarrow 0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$



damit: $\theta(x) = \frac{2Fa}{G I_p}\, x$ (3)

$b = (a+R)\sin(\theta(2a))$

$\sin(\theta(2a)) = \frac{b}{a+R}$

$\sin\varphi \approx \varphi$ $(\varphi \ll 1)$

$\theta(2a) = \frac{b}{a+R}$ (4)

4) Auflösen:

(3) in (4): $\frac{2Fa}{G I_p}\, 2a = \frac{b}{a+R}$

$$\frac{4a^2}{G I_p} F = \frac{b}{a+R}$$

nach G auflösen: $\frac{4a^2}{I_p} F \frac{a+R}{b} = G$

3.

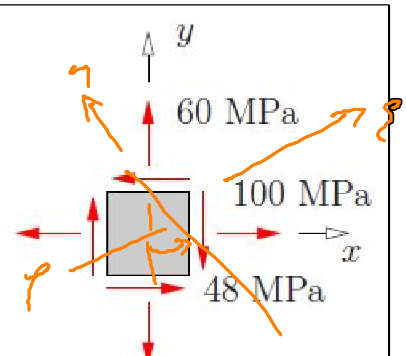
Der Spannungszustand an einem Punkt in einer dünnen Stahlplatte ist nebenstehend abgebildet. Bestimmen Sie

(a) die Hauptrichtungen und Hauptspannungen,

(b) die maximale Schubspannung und

(c) die Spannungskomponenten für ein Element, das aus dem abgebildeten durch Drehung um 30° entgegen dem Uhrzeigersinn entsteht.

Tut: Wiederholung, siehe Homepage; Ha: -



Aufgabe 3

(a)

1. Hauptspannung σ_{H1}

$$\sigma_{H1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{31}$$

2. Hauptspannung σ_{H2}

$$\sigma_{H2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{32}$$

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 80\text{ MPa} \tag{33}$$

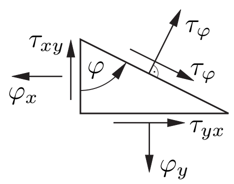
$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 52\text{ MPa} \tag{34}$$

Ergebnis:

$$\underline{\sigma_{H1}} = 80\text{ MPa} + 52\text{ MPa} = 132\text{ MPa} > \sigma_x \tag{35}$$

$$\underline{\sigma_{H2}} = 80\text{ MPa} - 52\text{ MPa} = \underline{28\text{ MPa}} < \sigma_y \tag{36}$$

Hauptrichtung φ_H:



Aus GGW am Flächenelement ist die Schubspannung τ_φ:

$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \tag{37}$$

Bedingung für φ_H:

$$\boxed{\tau_\varphi \overset{!}{=} 0} \tag{38}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_H = \frac{1}{2}\arctan\left(-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \tag{39}$$

$$\varphi_H = \frac{1}{2}\arctan(-2{,}4) = -0{,}588 \,\hat{=}\, -33{,}6^\circ \tag{40}$$

(b) max. Schubspannung:

$$\left[\text{bei } \varphi_{\tau\max} = \frac{\pi}{4} + \varphi_H = 11{,}31^\circ\right] \tag{41}$$

$$\tau_{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{42}$$

$$= \pm\left(\frac{\sigma_{H1} - \sigma_{H2}}{2}\right) = \pm 52\text{ MPa} \tag{43}$$

(c) Spannungskomponenten im Koordinatensystem $\tilde{x}, \tilde{y}$ unter $\varphi = 30^\circ$ zum x, y-System:

$$\begin{aligned}\sigma_{\tilde{x}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi \\ &= 80\text{ MPa} + 20\text{ MPa}\cos 60^\circ - 48\text{ MPa}\sin 60^\circ \\ &= 48{,}43\text{ MPa}\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}\tau_{\tilde{x}\tilde{y}} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \\ &= -20\text{ MPa}\sin 60^\circ - 48\text{ MPa}\cos 60^\circ \\ &= -41{,}32\text{ MPa}\end{aligned} \tag{45}$$

Die Spur des Spannungstensors (die Summe der Hauptdiagonalelemente der entsprechenden Matrix) ist invariant gegen eine Drehung des Koordinatensystems. (Ebenso die Determinante, aber das wird hier nicht ausgenutzt.)

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{\tilde{x}} + \sigma_{\tilde{y}} = \sigma_{H1} + \sigma_{H2} \tag{46}$$

$$\sigma_{\tilde{y}} = \sigma_x + \sigma_y - \sigma_{\tilde{x}} = 111{,}57\text{ MPa} \tag{47}$$

<u>Grafische Lösung:</u>